Escola Politècnica Superior
d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

PROJECTE FI DE CARRERA

TÍTOL: ANÁLISIS DE CIRCUITOS MEDIANTE LA HERRAMIENTA MATLAB 7

AUTOR: Julio César López Virú

TITULACIÓ: Enginyeria Tècnica Industrial Electrònica

DIRECTOR: Francesc Xavier Roset Juan

DEPARTAMENT: Enginyeria Electrònica

DATA: 07/2012

Aquest Projecte té en compte aspectes mediambientals: Sí x No

PROJECTE FI DE CARRERA

RESUM (màxim 50 línies)

La asignatura obligatoria de sistemas electrónicos impartida en los grados de ingeniería, relacionados con la electricidad y la electrónica, del campus de Vilanova de la Universitat Politècnica de Catalunya nos abre paso hacia una propuesta para el aprendizaje, prevista fuera de clases, en la que será el propio estudiante el responsable de su aprendizaje. La técnica docente propuesta corresponde al Aprendizaje Basado en Problemas y el material de aprendizaje es la herramienta informática Matlab 7. La aplicación de la técnica en ingeniería sobre el programa matemático está focalizada a su uso en el análisis de circuitos, por tanto hay que ofrecer por una parte el diseño de la estrategia de aprendizaje y, por el otro, el material necesario para llevar a buen puerto la práctica. Este proyecto aboga por el aprendizaje basado en problemas, como evaluarlo, sugiere una propuesta docente para el conocimiento y aplicación de Matlab en el análisis de circuitos electrónicos. Plantea la forma y el material necesario para llevar a cabo este método docente propuesto para habilitar al alumno es el dominio de la aplicación del software Matlab para la solución circuital.

Paraules clau (màxim 10):

ABP	PBL	Aprendizaje	Método
MATLAB	Cramer	EDO	Laplace
Análisis	Circuitos		

Índice

1. Introducción

1.1. Objetivos

El objetivo principal de este proyecto es dar a conocer a los alumnos el entorno de programación Matlab como una herramienta práctica en el desarrollo del análisis de circuitos electrónicos impartidos en los grados de ingeniería relacionados con la electricidad y la electrónica en general. Este trabajo se focaliza en la asignatura troncal y común en grados de ingenierías industriales de cuarto cuatrimestre de sistemas electrónicos impartida en el campus de Vilanova de la Universitat Politècnica de Catalunya. Para conseguir esta meta se realiza una propuesta concreta a través del método de aprendizaje basado en problemas y centrada en el alumno cuya finalidad es motivarle a fin que el alumno conozca y sea capaz de aplicar las instrucciones básicas para el análisis de circuitos electrónicos de forma independiente.

1.2. Justificación del PFC

En pleno siglo 21 las tecnologías de la informática y la comunicación se están imponiendo en todos los ámbitos. La universidad como faro de conocimiento y referente científico debe asegurar su modernidad y estar a la vanguardia de las mejores técnicas pedagógicas disponibles en la enseñanza superior. El cambio de paradigma que ha significado la integración del espació de enseñanza universitaria europeo en lo que se ha llamado Bolonia, supone una unificación y cambio tanto en los contenidos como en las técnicas de aprendizaje. En este sentido, para lograr una formación superior es imprescindible el conocimiento y aplicación del software matemático básico y de otros programas que resuelvan, simulen, diseñen y hagan predicciones de los equipos y maquinaria que construyen los ingenieros.

La asignatura obligatoria de circuitos electrónicos impartida en los grados de ingeniería basados en la electricidad nos abre paso hacia una propuesta para su aprendizaje, prevista fuera de clases, en la que será el propio estudiante el responsable de su aprendizaje. La técnica docente propuesta corresponde al ABP y el material de aprendizaje es el software de Matlab versión 7. La aplicación de la técnica en ingeniería sobre el programa matemático está focalizada a su uso en el análisis de circuitos, por tanto hay que ofrecer por una parte el diseño de la estrategia de aprendizaje y, por el otro, el material necesario para llevar a buen puerto la práctica. Este proyecto aboga por el aprendizaje basado en problemas, como evaluarlo, sugiere una propuesta docente para el conocimiento y aplicación de Matlab en el análisis de sistemas electrónicos y plantea la forma y el material necesario para llevarlo a cabo.

2. Técnica de Aprendizaje Basado en Problemas

2.1. Introducción

Existen diferentes técnicas de aprendizaje que pueden ser implementadas como estrategias de trabajo a lo largo de un curso específico, e incluso como técnicas didácticas aplicadas para la revisión de ciertos objetivos de aprendizaje de un curso.

De estás técnicas las más comunes son el método de casos, el aprendizaje basado en problemas o el método de proyectos.

El método de casos, es la descripción de una situación concreta para aprender o perfeccionarse en algún campo determinado. En este método se proponen grupos para que los alumnos individual y colectivamente aprendan a analizar y tomar decisiones. Con esta metodología se pretende que los alumnos estudien la situación, definan los problemas, contrasten ideas, y se planteen soluciones a partir de las herramientas que dispongan o soliciten.

El profesor les proporciona la información que necesitan para que los alumnos puedan resolver el problema planteado, un ejercicio que puede tener más de una solución.

La utilidad del método de casos es aproximar al individuo a las condiciones de la vida real, para prepararlo desarrollando talentos latentes de visión, autoridad, comunicación y liderazgo, que los capacite para la confrontación civilizada, la comunicación ágil y efectiva, por esta razón suele ser un problema real.

Otro de los métodos docentes innovadores es el aprendizaje basado en problemas o ABP. Es una estrategia de enseñanza-aprendizaje en la que tanto la adquisición de conocimientos como el desarrollo de habilidades y actitudes resulta importante.

En el ABP se hacen grupos pequeños de alumnos, para analizar y resolver un problema seleccionado o diseñado especialmente para que el logro de ciertos objetivos de aprendizaje. Durante el proceso de interacción de los alumnos para entender y resolver el problema se logra, además del aprendizaje del conocimiento propio de la materia que puedan elaborar un diagnóstico de sus propias necesidades de aprendizaje, que comprendan la importancia de trabajar colaborando, que desarrollen habilidades de análisis y síntesis de información, además de comprometerse con su propio proceso de aprendizaje.

Una de las principales características del ABP está en fomentar en el alumno la actitud positiva hacia el aprendizaje, en este método se respeta la autonomía del estudiante, quien aprende sobre los contenidos y la propia experiencia de trabajo en la dinámica del método, ya que el profesor solo les orienta.

Por último tenemos el método de proyectos que emerge de una visión de la educación en la cual los estudiantes toman una mayor responsabilidad de su propio aprendizaje y en donde aplican (proyectos reales) las habilidades y conocimientos adquiridos en clase. Este método busca enfrentar a los alumnos a situaciones que los llevan a rescatar, comprender y aplicar aquello que aprenden como una herramienta para resolver problemas o proponer mejoras en las comunidades en donde se desenvuelven.

En resumen podemos decir que:

- El método de casos aún a pesar de parecer favorecedor para la labor, tiene el gran inconveniente de que el contenido de aprendizaje es impartido por el docente siendo el principal responsable del desarrollo del método y el alumno no asume la responsabilidad en su elaboración.

- El método de proyectos no posee los requisitos necesarios para desarrollar la actividad fuera de clases pues toda la información que permite la realización del proyecto final, característica principal del método, está ideado para hacerse dentro del tiempo lectivo. La finalidad es que los estudiantes sean supervisados por el docente en una continua evaluación de la actividad.

- El ABP, por el contrario, tiene todas las características necesarias para desarrollar su actividad fuera de clases, exige un tiempo mínimo de dedicación en horas docentes y, sobre todo, es el propio alumnado el encargado de su aprendizaje, desarrollará habilidades de investigación y comunicación aprendiendo en grupo en un proceso continuo de retroalimentación, recopilando, asimilando, compartiendo y absorbiendo conocimientos y experiencias como parte de una unidad centrada en el desempeño de una tarea o trabajo. El docente es un observador que guía la actividad hacia el buen camino.

2.2. Composición del aprendizaje basado en problemas

El aprendizaje basado en problemas, ABP (del inglés Problem-Based Learning) es un aprendizaje que se produce como resultado del esfuerzo que hacen los alumnos para desarrollar el ejercicio, de forma que se entienda el planteamiento, conocer los recursos disponibles, saber cuáles y donde aplicarlos a fin de solucionar el problema. Resulta especialmente adecuado en el contexto de las enseñanzas técnicas, puesto que la realización de proyectos es una labor esencial de los técnicos e ingenieros.

Se emplea desde la década de los 60's, su primera aplicación fue en la Escuela de Medicina de la universidad de Case Western Reserve en EE.UU y en la Universidad de McMaster de Canadá.

Los fundamentos y los precedentes de su aplicación en la enseñanza universitaria[1] nos indican que no es un método novedoso.. No obstante, lo cierto es que el proyecto de convergencia europea (EEES), y en particular la adopción del sistema europeo de créditos (ECTS), está dando gran protagonismo a los métodos activos en general y al ABP en particular. La razón es que la adopción del sistema ECTS pone sobre la mesa del docente los dos retos siguientes:

- Diseñar un programa de actividades para realizar dentro y fuera de clase, de las que el alumno no pueda escapar sin haber aprendido como hacer.

- Conseguir que el alumno haga dichas actividades de forma correcta.

En este contexto, los métodos ABP nos ofrecen, por una parte, pautas específicas para diseñar esos programas de actividades, es decir, para llenar de actividad significativa todas las horas de clase y fuera de clase que nos han sido asignadas en virtud de los ECTS de nuestra asignatura. Por otra parte, los métodos ABP introducen elementos de motivación que hacen más probable que el alumno recorra el camino que hemos preparado. Es bien sabido que los alumnos están más motivados y persisten más en el esfuerzo cuando trabajan en grupo para realizar un proyecto que perciben que está conectado con su futura actividad profesional.

[1] Consultar en [2]

2.2.1. Características del ABP

Una de las características principales del ABP esta en fomentar en el alumno la actitud positiva hacia el aprendizaje, en el método se respeta la autonomía del estudiante quien aprende sobre los contenidos y la propia experiencia de trabajo en la dinámica del método, los alumnos tienen además la posibilidad de observar en la práctica aplicaciones de lo que se encuentran aprendiendo en torno al problema.

La transferencia pasiva de información es algo que se elimina en el ABP, por el contrario, toda la información que se vierte en el grupo es buscada, aportada, o bien, generada por el mismo grupo.

A continuación se describen algunas características del ABP:

- Es un método de trabajo activo donde los alumnos participan constantemente en la adquisición de su conocimiento.
- El método se orienta a la solución de problemas que son seleccionados o diseñados para lograr el aprendizaje de ciertos objetivos de conocimiento.
- El aprendizaje se centra en el alumno y no en el profesor o sólo en los contenidos.
- Es un método que estimula el trabajo colaborativo en diferentes disciplinas, se trabaja en grupos pequeños.
- Los cursos con este modelo de trabajo se abren a diferentes disciplinas del conocimiento.
- El maestro se convierte en un facilitador o tutor del aprendizaje. Al trabajar con el ABP la actividad gira en torno a la discusión de un problema (figura 2.1) y el aprendizaje surge de la experiencia de trabajar sobre ese problema, es un método que estimula el autoaprendizaje y permite la práctica del estudiante al enfrentarlo a situaciones reales y a identificar sus deficiencias de conocimiento.

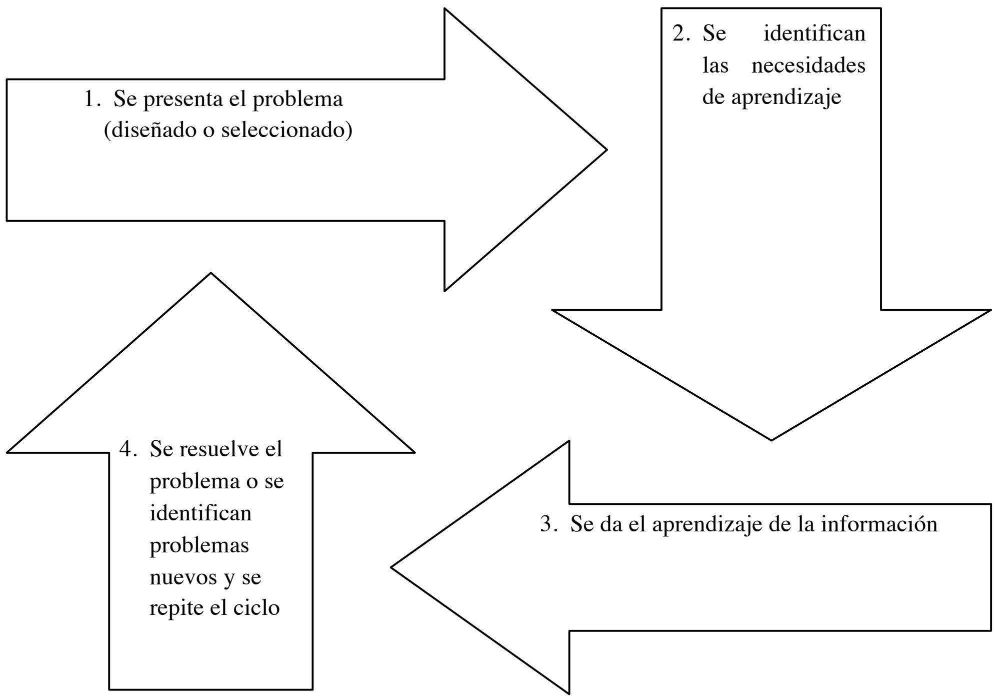


Figura 2.1. Pasos del proceso de aprendizaje en el ABP

2.2.2. Objetivos del ABP

El ABP busca un desarrollo integral en los alumnos y conjuga la adquisición de conocimientos propios de la especialidad de estudio, además de habilidades, actitudes y valores. Se pueden señalar los siguientes objetivos del ABP:

- Promover en el alumno la responsabilidad de su propio aprendizaje.
- Desarrollar una base de conocimiento relevante caracterizada por profundidad y flexibilidad.
- Desarrollar habilidades para la evaluación crítica y la adquisición de nuevos conocimientos con un compromiso de aprendizaje de por vida.
- Desarrollar habilidades para las relaciones interpersonales.
- Involucrar al alumno en un reto (problema, situación o tarea) con iniciativa y entusiasmo.
- Desarrollar el razonamiento eficaz y creativo de acuerdo a una base de conocimiento integrada y flexible.
- Monitorear la existencia de objetivos de aprendizaje adecuados al nivel de desarrollo de los alumnos.
- Orientar la falta de conocimiento y habilidades de manera eficiente y eficaz hacia la búsqueda de la mejora.
- Estimular el desarrollo del sentido de colaboración como un miembro de un equipo para alcanzar una meta común.

2.2.3. Ventajas del ABP

- Alumnos con mayor motivación: El método estimula que los alumnos se involucren más en el aprendizaje debido a que sienten que tienen la posibilidad de interactuar con la realidad y observar los resultados de dicha interacción.
- Un aprendizaje más significativo: El ABP ofrece a los alumnos una respuesta obvia a preguntas como ¿Para qué se requiere aprender cierta información?, ¿Cómo se relaciona lo que se hace y aprende en la escuela con lo que pasa en la realidad?
- Desarrollo de habilidades de pensamiento: La misma dinámica del proceso en el ABP y el enfrentarse a problemas lleva a los alumnos hacia un pensamiento crítico y creativo.
- Desarrollo de habilidades para el aprendizaje: El ABP promueve la observación sobre el propio proceso de aprendizaje, los alumnos también evalúan su aprendizaje ya que generan sus propias estrategias para la definición del problema, recaudación de información, análisis de datos, la construcción de hipótesis y la evaluación.
- Integración de un modelo de trabajo: El ABP lleva a los alumnos al aprendizaje de los contenidos de información de manera similar a la que utilizarán en situaciones futuras, fomentando que lo aprendido se comprenda y no sólo se memorice.

- Posibilita mayor retención de información: Al enfrentar situaciones de la realidad los alumnos recuerdan con mayor facilidad la información ya que ésta es más significativa para ellos.

- Permite la integración del conocimiento: El conocimiento de diferentes disciplinas se integra para dar solución al problema sobre el cual se está trabajando, de tal modo que el aprendizaje no se da sólo en fracciones sino de una manera integral y dinámica.

- Las habilidades que se desarrollan son perdurables; esto es, al estimular habilidades de estudio auto-dirigido, los alumnos mejorarán su capacidad para estudiar e investigar sin ayuda de nadie para afrontar cualquier obstáculo, tanto de orden teórico como práctico, a lo largo de su vida. Los alumnos aprenden resolviendo o analizando problemas del mundo real y aprenden a aplicar los conocimientos adquiridos a lo largo de su vida en problemas reales.

- Incremento de su autodirección: Los alumnos asumen la responsabilidad de su aprendizaje, seleccionan los recursos de investigación que requieren: libros, revistas, bancos de información, etc.

- Mejoramiento de comprensión y desarrollo de habilidades: Con el uso de problemas de la vida real, se incrementan los niveles de comprensión, permitiendo utilizar su conocimiento y habilidades.

- Habilidades interpersonales y de trabajo en equipo: El ABP promueve la interacción incrementando algunas habilidades como; trabajo de dinámica de grupos, evaluación de compañeros y cómo presentar y defender sus trabajos.

- Actitud auto-motivada: Los problemas en el alumno incrementan su atención y motivación. Es una manera más natural de aprender. Les ayuda a continuar con su aprendizaje al salir de la escuela.

2.3. Diseño del aprendizaje basado en problemas

Inicialmente es importante hacer un análisis de las condiciones que deben cumplirse para poder trabajar con esta metodología de manera eficiente.

2.3.1. Condiciones para el desarrollo de los problemas

El proceso de organización de toda técnica didáctica implica la existencia de ciertas condiciones para su operación. En el caso del ABP, por ser una forma de trabajo que involucra una gran cantidad de variables, dichas condiciones toman particular importancia. A continuación se describen algunas condiciones deseables para el trabajo en el ABP:

- Cambiar el énfasis del programa de enseñanza-aprendizaje, requiriendo que los alumnos sean activos, independientes, con autodirección en su aprendizaje y orientados a la solución de problemas en lugar de ser los tradicionales receptores pasivos de información.

- Enfatizar el desarrollo de actitudes y habilidades que busquen la adquisición activa de nuevo conocimiento y no sólo la memorización del conocimiento existente.

- Generar un ambiente adecuado para que el grupo de participantes pueda trabajar de manera colaborativa para resolver problemas comunes en forma analítica, además promover la participación de los maestros como tutores en el proceso de discusión y en el aprendizaje.

- Estimular en los alumnos la aplicación de conocimientos adquiridos en otros cursos en la búsqueda de la solución al problema.

- Guiados por maestros ejerciendo la función de facilitadores del aprendizaje, desarrollar en los alumnos el pensamiento crítico, habilidades para la solución de problemas y para la colaboración, mientras identifican problemas, formulan hipótesis, conducen la búsqueda de información, realizan experimentos y determinan la mejor manera de llegar a la solución de los problemas planteados.

- Motivar a los alumnos a disfrutar del aprendizaje estimulando su creatividad y responsabilidad en la solución de problemas que son parte de la realidad.

- Identificar y estimular el trabajo en equipo como una herramienta esencial del ABP.

- Abrir al grupo la responsabilidad de identificar y jerarquizar los temas de aprendizaje en función del diagnóstico de sus propias necesidades.

- Promover que los alumnos trabajen de manera independiente fuera del grupo investigando sobre los temas necesarios para resolver el problema, luego discutirán lo que han aprendido de manera independiente con el resto del grupo, de la misma manera los alumnos podrán pedir asistencia de maestros u otros expertos en el área sobre temas que consideren de mayor importancia para la solución del problema y el aprendizaje de los contenidos

En el diseño y el uso de los problemas, el eje del trabajo en el ABP está en el planteamiento del problema. Los alumnos se sentirán involucrados y con mayor compromiso en la medida en que identifican en el problema un reto y una posibilidad de aprendizaje significativo.

2.3.2. Características de los problemas

- El diseño del problema debe, comprometer el interés de los alumnos y motivarlos a examinar de manera profunda los conceptos y objetivos que se quieren aprender. El problema debe estar en relación con los objetivos del curso y con problemas o situaciones de la vida diaria para que los alumnos encuentren mayor sentido en el trabajo que realizan.

- Los problemas deben llevar a los alumnos a tomar decisiones o hacer juicios basados en hechos, información lógica y fundamentada. Están obligados a justificar sus decisiones y razonamiento en los objetivos de aprendizaje del curso. Los problemas o las situaciones deben requerir que los estudiantes definan qué suposiciones son necesarias y por qué, qué información es relevante y qué pasos o procedimientos son necesarios con el propósito de resolver el problema.

- La cooperación de todos los integrantes del grupo de trabajo es necesaria para poder abordar el problema de manera eficiente. La longitud y complejidad del problema debe ser administrada por el tutor de tal modo que los alumnos no se dividan el trabajo y cada uno se ocupe únicamente de su parte.

- Las preguntas de inicio del problema deben tener alguna de las siguientes características, de tal modo que todos los alumnos se interesen y entren a la discusión del tema:

- Preguntas abiertas, es decir, que no se limiten a una respuesta concreta.
- Ligadas a un aprendizaje previo, es decir, dentro de un marco de conocimientos específicos.
- Temas de controversia que despierten diversas opiniones

De este modo se mantiene a los estudiantes trabajando como un grupo y sacando las ideas y el conocimiento de todos los integrantes y evitando que cada uno trabaje de manera individual.

- El contenido de los objetivos del curso debe ser incorporado en el diseño de los problemas, conectando el conocimiento anterior a nuevos conceptos y ligando nuevos conocimientos a conceptos de otros cursos o disciplinas.

Los problemas deben estar diseñados para motivar la búsqueda independiente de la información a través de todos los medios disponibles para el alumno y además generar discusión en el grupo.

En la situación del trabajo del grupo ante el problema, el mismo diseño del problema debe estimular que los alumnos utilicen el conocimiento previamente adquirido, en este proceso los alumnos aprenden a aprender, por lo tanto desarrollan la capacidad de aplicar el pensamiento sistémico para resolver las nuevas situaciones que se le presentarán a lo largo de su vida

2.3.3. Como deben los alumnos afrontar el problema

- Leer y analizar el escenario en el que se presenta el problema: discutir en el grupo los puntos necesarios para establecer un consenso sobre cómo se percibe dicho escenario.
- Identificar cuáles son los objetivos de aprendizaje que se pretenden cubrir con el problema que el profesor - tutor les ha planteado.
- Identificar la información con la que se cuenta: elaborar un listado de lo que ya se conoce sobre el tema, identificar cuál es la información que se tiene entre los diferentes miembros del grupo.
- Un esquema del problema: elaborar una descripción del problema, esta descripción debe ser breve, identificando qué es lo que el grupo está tratando de resolver, reproducir, responder o encontrar de acuerdo al análisis de lo que ya se conoce, la descripción del problema debe ser revisada a cada momento en que se disponga de nueva información.
- Un diagnóstico situacional: elaborar grupalmente una lista de lo que se requiere para enfrentar al problema, preparar un listado de preguntas de lo que se necesita saber para poder solucionar el problema, así como conceptos que necesitan dominarse. Este es el punto en el que el grupo está trabajando en la elaboración de su propio diagnóstico situacional en torno a los objetivos de aprendizaje y a la solución del problema (tabla 2.1).

¿Qué sabemos?	¿Qué necesitamos saber?	¿Cómo lo vamos a saber?

Tabla 2.1. Diagnóstico situacional

- Un esquema de trabajo: preparar un plan con posibles acciones para cubrir las necesidades de conocimiento identificadas y donde se puedan señalar las recomendaciones, soluciones o hipótesis. Es pertinente elaborar un esquema que señale las posibles opciones para llegar a cubrir los objetivos de aprendizaje y la solución del problema.

- Recopilar información: El equipo busca información en todas las fuentes pertinentes para cubrir los objetivos de aprendizaje y resolver el problema.

- Analizar la información: Trabajando en el grupo se analiza la información recopilada, se buscan opciones y posibilidades y, se replantea la necesidad de tener más información para solucionar el problema, en caso de ser necesario el grupo se dedica a buscar más información.

- Plantearse los resultados: A manera de ejercicio para el grupo es importante que preparen un reporte en donde se hagan recomendaciones, estimaciones sobre resultados, inferencias u otras resoluciones apropiadas al problema, todo lo anterior debe estar basado en los datos obtenidos y en los antecedentes. Todo el grupo debe participar en este proceso de tal modo que cada miembro tenga la capacidad de responder a cualquier duda sobre los resultados.

- Retroalimentar: el proceso de retroalimentación debe ser constante a lo largo de todo el proceso de trabajo del grupo, de tal manera que sirva de estímulo a la mejora y desarrollo del proceso, se recomienda al final de cada sesión dejar un espacio de tiempo para la retroalimentación grupal. A lo largo del proceso el grupo debe estar atento a retroalimentar en tres diferentes coordenadas de interacción:

    - La relación de grupo con el contenido de aprendizaje.

    - La relación de los miembros dentro del grupo.

    - La relación de los miembros con el tutor del grupo.

- La evolución del grupo: el trabajo del grupo continuará y en esa medida el aprendizaje, tanto en relación con los contenidos como en relación con la interacción de los miembros con el grupo, por lo tanto se recomienda establecer, con base en una primera experiencia, indicadores para el monitoreo del desempeño del grupo.

La necesidad de información requerida para entender el problema abre temáticas de estudio a los alumnos, ellos pueden trabajar de manera independiente o en grupos pequeños identificando y utilizando todos los recursos disponibles para el estudio de estos temas, evidentemente es importante que compartan el conocimiento adquirido con el resto del grupo.

Dentro del proceso de trabajo del ABP los alumnos tienen la responsabilidad de participar activamente en las discusiones del grupo. Deben de estar dispuestos a dar y aceptar crítica constructiva, admitir las deficiencias de conocimiento en donde se presenten y estudiar de manera independiente para poder contribuir al esfuerzo grupal. El alumno también tiene la responsabilidad de ser honesto al evaluar las actividades de todos los miembros del equipo, incluyendo las del tutor y las propias.

Por otro lado, los momentos en la evolución de un grupo de aprendizaje que utiliza el ABP es un proceso descrito en la figura 2.2

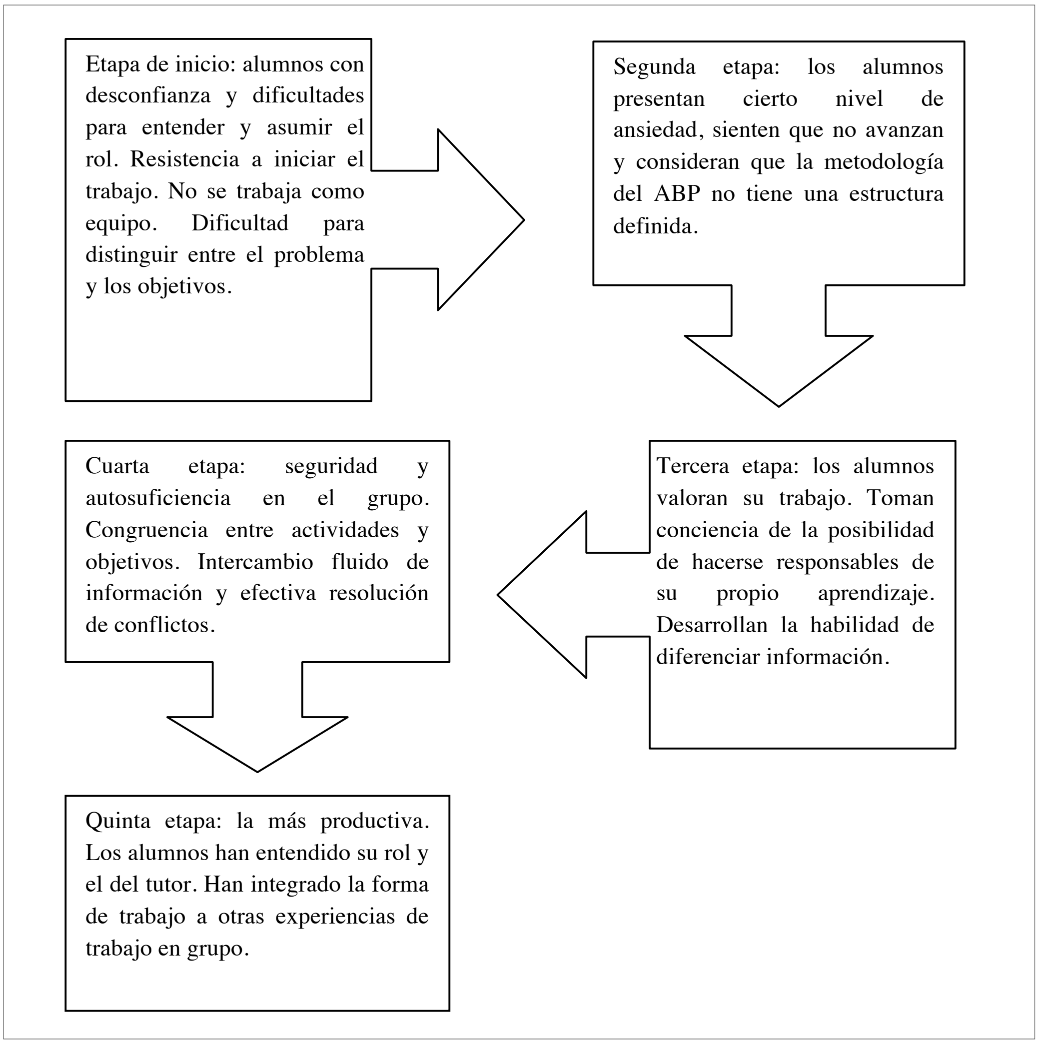


Figura 2.2. Etapas del alumno en el ABP

2.3.4. Los aportes de información en el proceso de ABP

Es importante que toda la información que se vierta en el grupo con el fin de llegar a la solución del problema haya sido validada y verificada, ya que es fundamental que los alumnos confíen en la información que cada uno aporta. Los alumnos deben sentirse libres para cuestionar cualquier información que se aporta al grupo.

Durante el proceso de trabajo en el ABP se recomienda que el tutor verifique la comprensión de los alumnos sobre la información y los temas analizados pidiéndoles que apliquen el conocimiento adquirido para lo siguiente:

- Elaborar un mapa conceptual que ilustre la información que se ha obtenido.
- Generar una tabla que muestre las relaciones entre los conceptos.

- Elaborar un resumen de los puntos discutidos en torno al problema en diferentes momentos de la sesión.
- A fin de observar la comprensión de la información, el tutor debe estar atento a plantear preguntas para saber:
    - Si todos están de acuerdo con la información que se ha discutido.
    - Si todos comprenden la información.
    - Si la información presentada ayuda en la solución del problema y la cobertura de los objetivos de aprendizaje.

El tutor debe dejar en manos del grupo decidir cuándo debe actuar como experto, siempre que con su actitud no genere dependencia.

2.4. Actividades y responsabilidades del alumno y del profesor

El uso del ABP como técnica didáctica determina que los alumnos y profesores modifiquen su conducta y sus actitudes, implica además que tomen conciencia de la necesidad de desarrollar una serie de habilidades para poder tener un buen desempeño en sus actividades de aprendizaje. El aprendizaje en grupo también trae como consecuencia que se tomen nuevas responsabilidades para poder sacar adelante los objetivos de aprendizaje que se ha trazado el grupo.

2.4.1. Responsabilidades del alumno

- Una integración responsable en torno al grupo y además una actitud entusiasta en la solución del problema.
- Aporte de información a la discusión grupal. Lo anterior les facilita un entendimiento detallado y específico sobre todos los conceptos implicados en la atención al problema.
- Búsqueda de la información que consideren necesaria para entender y resolver el problema, esto les obliga a poner en práctica habilidades de análisis y síntesis.
- Investigación por todos los medios como por ejemplo: la biblioteca, los medios electrónicos, maestros de la universidad o los propios compañeros del grupo. Lo anterior les permite un mejor aprovechamiento de los recursos.
- Desarrollo de habilidades de análisis y síntesis de la información y una visión crítica de la información obtenida.
- Compromiso para identificar los mecanismos básicos que puedan explicar cada aspecto importante de cada problema.
- Estimular dentro del grupo el uso de las habilidades colaborativas y experiencias de todos los miembros del equipo. Señalando la necesidad de información y los problemas de comunicación.

- Apertura para aprender de los demás, compromiso para compartir el conocimiento, la experiencia o las habilidades para analizar y sintetizar información.
- Identificar las prioridades de aprendizaje, teniendo en cuenta que la tarea principal de cada problema es lograr ciertos objetivos de aprendizaje y no sólo llegar al diagnóstico y a la solución del problema.
- Compromiso para retroalimentar el proceso de trabajo del grupo buscando que se convierta en un grupo efectivo de aprendizaje.
- Durante las sesiones de trabajo orientar las participaciones a la discusión de los objetivos de aprendizaje y no desviar las intervenciones a otros temas. Buscar durante la sesión la aclaración de dudas propias y de otros compañeros.
- Apertura para realizar las preguntas que sean necesarias para aclarar la información y cubrir los objetivos propuestos para la sesión.
- Compartir información durante las sesiones, estimulando la comunicación y participación de los otros miembros del grupo.

2.4.2. Actividades y responsabilidades del profesor

En el ABP el profesor a cargo del grupo actúa como un tutor en lugar de ser un maestro convencional experto en el área y transmisor del conocimiento. El tutor ayudará a los alumnos a reflexionar, identificar necesidades de información y les motivará a continuar con el trabajo, es decir, los guiará a alcanzar las metas de aprendizaje propuestas.

El tutor no es un observador pasivo, por el contrario, debe estar activo orientando el proceso de aprendizaje asegurándose de que el grupo no pierda el objetivo trazado, y además identifique los temas más importantes para cumplir con la resolución del problema.

La principal tarea del tutor es asegurarse de que los alumnos progresen de manera adecuada hacia el logro de los objetivos de aprendizaje, además de identificar qué es lo que necesitan estudiar para comprender mejor. Lo anterior se logra por medio de preguntas que fomenten el análisis y la síntesis de la información además de la reflexión crítica para cada tema.

El tutor apoya el desarrollo de la habilidad en los alumnos para buscar información y recursos de aprendizaje que les sirvan en su desarrollo personal y grupal.

Una de las habilidades básicas del tutor consiste en la elaboración de preguntas para facilitar el aprendizaje, resulta fundamental en esta metodología hacer las preguntas apropiadas en el momento adecuado ya que esto ayuda a mantener el interés del grupo y a que los alumnos recopilen la información adecuada de manera precisa.

Sobre las características personales del tutor:

- Debe estar dispuesto a considerar el ABP como un método efectivo para adquirir información y para desarrollar la habilidad de pensamiento crítico.
- Considerar al alumno como principal responsable de su propia educación.
- Concebir al grupo pequeño en el ABP como espacio de integración, dirección y retroalimentación.

- Debe estar disponible para los alumnos durante el período de trabajo del grupo sin abandonar su papel de tutor.

- Debe estar preparado y dispuesto para tener asesorías individuales con los alumnos cuando se requiera.

- Evaluar en el tiempo oportuno a los alumnos y a los grupos y, estar en contacto con maestros y tutores del área con el fin de mejorar el curso en función de su relación con el contenido de otros cursos.

- Coordinar las actividades de retroalimentación de los alumnos a lo largo del período de trabajo del grupo.

2.5. Evaluación del aprendizaje basado en problemas

Como se ha visto el proceso de enseñanza - aprendizaje es diferente en el ABP y en un proceso de enseñanza convencional, por lo anterior, la evaluación del alumno en el ABP se convierte en un dilema para el profesor. Más que centrarse sobre hechos, en el ABP se fomenta un aprendizaje activo y un auto aprendizaje, por lo que los estudiantes definen sus propias tareas de aprendizaje. Los múltiples propósitos del ABP traen como consecuencia la necesidad de una variedad de técnicas de evaluación.

A continuación se describen brevemente algunas formas de evaluación que se aplican en el proceso de ABP:

- Examen escrito: no basado en la reproducción automática de contenidos, sino en la organización coherente de conocimientos.

- Caso práctico: para garantizar que los alumnos son capaces de aplicar habilidades aprendidas durante el curso.

- Mapas conceptuales: los alumnos representan su conocimiento y crecimiento cognitivo a través de la creación de relaciones lógicas entre los conceptos y su representación grafica.

- Evaluación del compañero (co-evaluación): se le proporciona al alumno una guía de categorías de evaluación que le ayuda al proceso de evaluación del compañero. Este proceso, también enfatiza, el ambiente cooperativo del ABP.

- Autoevaluación: permite al alumno pensar cuidadosamente acerca de la que sabe, de lo que no sabe y de lo que necesita saber para cumplir determinadas tareas. Algunos aspectos pueden ser: aprendizaje logrado, tiempo invertido, proceso seguido, etc.

- Evaluación del tutor: consiste en retroalimentar al tutor acerca de la manera en que participó con el grupo. Puedes ser dada por el grupo o por un observador externo.

- Presentación oral: el ABP proporciona a los alumnos una oportunidad para practicar sus habilidades de comunicación. Las presentaciones orales son el medio por el cual se pueden observar estas habilidades.

- Informe Escrito: permite a los alumnos practicar la comunicación por escrito.

No hay recetas fijas ni un sistema de evaluación ideal, por lo que los instrumentos de evaluación utilizados pueden ser uno o combinarse e incluir además cuestionarios, tutorías, etc. Lo realmente importante son los aspectos que se deben cubrir:

1. Los resultados del aprendizaje de contenidos
2. Aportes de conocimiento individual al proceso de razonamiento grupal
3. Interacciones personales entre los alumnos

2.5.1. Criterios de viabilidad

También son muy importantes los criterios que hay que seguir para validar y evaluar un problema:

- El problema funcionó como se esperaba ¿por qué si? ¿Por qué no?
- Los alumnos no presentan dificultades para la comprensión del tema.
- Llegan a la definición esperada del problema.
- Parece motivarles.
- La discusión que les lleva es adecuada: tiempo y extensión.
- Tienen suficiente conocimiento propio.
- Son capaces de generar respuestas en la lluvia de ideas que se realiza cuando se propone el problema.
- Pueden conectar (organizar) las ideas
- Los objetivos de aprendizaje que formulan son los esperados.

De esta manera el docente es el encargado de comprobar y ajustar los problemas, durante el proceso de presentación del problema y después de la aplicación de la técnica evaluar los resultados con la intención de perfeccionar el diseño del ABP.

3. Propuesta para el uso del ABP

3.1. Estado de la cuestión

El currículo actual en los grados de ingeniería relacionados con la electricidad e impartidos en la Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú tiene entre unidades obligatorias el estudio de los sistemas electrónicos basándose en el comportamiento de las conexiones de elementos físicos integrados en circuitos diseñados a un propósito.

La asignatura de Sistemas Electrónicos, SIEK, tiene como objetivo proporcionar los conocimientos básicos y dar al alumnado una visión general de la electrónica industrial. Por tanto, es esencial el conocimiento en los fundamentos y los métodos del análisis de circuitos.

SIEK se valora en 6 créditos ECTS y requiere un tiempo de dedicación recomendado de 150 horas que se distribuyen; entre clases teóricas y prácticas de laboratorio dentro de horario lectivo y el tiempo libre que disponga cada alumno para el aprendizaje de los contenidos en la asignatura.

Cuando el análisis del circuito concluye se afirma que la solución al ejercicio planteado pasa por la resolución de una expresión algébrica o a una ecuación diferencial ordinaria. De modo que el tiempo lectivo se debate entre la aplicación de los métodos de análisis de circuitos o entre el desarrollo de una expresión matemática para dar con la solución al ejercicio. Por fortuna se cuenta con herramientas informáticas que pueden hallar la solución al problema en cuestión de segundos, minimizando el coste lectivo.

Una de las herramientas informáticas que pueden desempeñar las tareas de cálculo matemático, es Matlab que se encuentra ya integrado en el currículo de SIEK. El problema es que se requiere de cierto tiempo para el aprendizaje del software Matlab (instrucciones y programación). En SIEK está previsto un tiempo dedicado a la herramienta pero su aprendizaje principalmente se da fuera de las aulas por lo que puede pasar inadvertido para el alumno considerándose una herramienta sin mas propósito que el destinado a SIEK. El análisis de circuitos, por el contrario, es imprescindible durante toda la carrera universitaria por lo que Matlab puede ser una valiosa herramienta de análisis e información, tan sólo hay que hacerlo notar, asignarle un valor al programa propuesto.

3.2. Desarrollo

El aprendizaje del software de Matlab se plantea fuera del lectivo. Se requiere, por tanto, una técnica como el aprendizaje basado en problemas en la que el propio alumno será el encargado de su aprendizaje, minimizando el tiempo de dedicación en horario lectivo.

Son los alumnos los que deben recopilar la información que cubran sus necesidades. Se debe recomendar medios como el campus virtual donde dispondrán de la documentación específica desarrollada para SIEK y el manual de Matlab desarrollado en este proyecto (capítulo 4).

Los grupos estarán constituidos por cuatro alumnos asumiendo el rol de cada uno tal como se indica en el apartado 2.4.1.

El docente supervisará los progresos de los grupos mediante un informe que estos facilitarán a través del campus virtual. No sólo es importante el desarrollo de la actividad sino también la etapa que afronta cada grupo, tal como indica la figura 2.2.

El docente debe motivar al grupo en todo momento, orientándolos hacia los objetivos planteado por la actividad. Debe estar disponible en horario de consultas para aclarar las dudas que el grupo no pueda resolver.

Para desencadenar el interés por la actividad hay que incentivar a los estudiantes mediante la valoración del esfuerzo con una nota incluida en su evaluación final o bien intercambiar una práctica basada en la herramienta SPICE de simulación de respuesta de los circuitos por los resultados obtenidos con el software Matlab.

El docente debe evaluar al grupo no tan solo por lograr el resultado del ejercicio propuesto sino, también, por la manera de transmitir sus conocimientos en clase siguiendo los criterios de evaluación descritos en el apartado 2.5.1.

3.3. Definir la propuesta

La propuesta consiste en la exposición de un problema de análisis de circuitos que deberá exponerse por grupos finalizado el periodo de prácticas. La exposición del problema se realizará en la pizarra y corroborando los resultados con el software de Matlab.

Los alumnos deben realizar un análisis exhaustivo del circuito con cualquier tipo de información relevante, con descripciones gráficas que expliquen su funcionamiento. Las instrucciones introducidas en Matlab deben mostrarse de modo que los oyentes comprendan su función en la resolución al problema, por lo que se recomienda un proyector en los que se puedan ver las instrucciones introducidas en el software.

La duración de la exposición en clase no debería ser superior a los 15 minutos por grupo, al final de cada presentación pasarían a una sesión de preguntas para que los oyentes resuelvan sus dudas, no deberían dedicarse más de 5 minutos. Por tanto, cada grupo dedicará 20 minutos a los demás sin mas propósito que el de transmitir sus conocimientos, generar discusión y facilitar respuestas.

Al principio de curso, el docente debe definir las propuestas de esta manera (este es un ejercicio a modo de ejemplo):

- El ejercicio de la figura 3.1 representa una situación que será encontrada en el estudio de los amplificadores: la combinación de la excitación continua I_o y una sinusoidal $A\cdot\cos(\omega\cdot t)$ sobre un circuito formado por una resistencia en paralelo con un condensador. Se pide calcular la tensión $v_c(t)$, corroborar el resultado con Matlab y representar gráficamente las corrientes de entrada y la tensión en el condensador en función del tiempo.

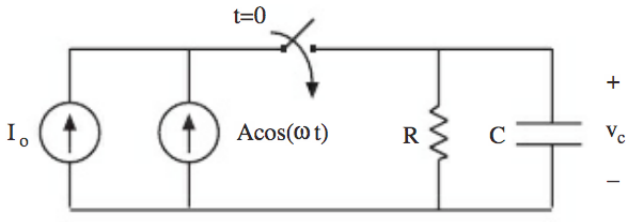


Figura 3.1. Circuito para la propuesta

- La actividad se expondrá en clase, durante los últimos días de prácticas. El ejercicio se resolverá en la pizarra y los resultados se corroborarán mediante la herramienta informática Matlab. Se utilizará un proyector para que toda la clase pueda hacer el seguimiento con las instrucciones necesarias.

- La presentación oral se hará en grupos de cuatro, la formación de los grupos la llevará a cabo el profesor. Los grupos dispondrán de 15 minutos para hacer la exposición, los siguientes 5 minutos estarán disponibles para que la clase pueda consultar dudas al respecto. Al finalizar las exposiciones se facilitará a cada alumno un cuestionario.

- Los grupos deben entregar cada dos semanas un informe con el progreso del ejercicio, pueden usarse mapas conceptuales. Se colgarán los informes en el campus digital.

- La nota de esta actividad supone el 50% de la nota de prácticas.

- Se dispone de información en campus digital y en los recursos frecuentes; la biblioteca y en la Web.

- Se deben cubrir los siguientes aspectos del problema;

    1. Método del análisis de circuitos seleccionado por el grupo.
    2. Otras formas de desarrollar el problema.
    3. Explicación del comportamiento de la señal $v_c(t)$.
    4. Corroborar los resultados con el software de Matlab.
    5. Representación temporal de la señal $v_c(t)$.

El docente supervisará los progresos del grupo a través de los informes y discutirá con ellos en caso en que lo requieran o si se apartasen de los objetivos que deben cubrir.

La presentación oral, sin embargo, determinará la nota de los alumnos, se seguirán los criterios descritos en el apartado 2.5.1

La clase al finalizar la exposición oral de los ejercicios deberá rellenar una encuesta de tal forma que se pueda medir el grado de satisfacción con el método de aprendizaje aplicado, algunas preguntas podrían ser las de la tabla 3.1

Pregunta	Si/No	Pregunta	Si/No	Pregunta	Si/No
¿es Matlab una herramienta útil?		¿utilizarías Matlab en otra asignatura?		¿has perdido el tiempo trabajando en grupo?	
¿sabes usar la regla de Cramer en Matlab?		¿has usado Matlab en las prácticas?		¿has aprendido a trabajar en grupo?	
¿puedes definir una EDO con Matlab?		¿sabes que el la función dsolve?		¿el grupo a discutido la solución del problema?	
¿sabes hallar una solución particular de la EDO con Matlab?		¿puedes representar gráficamente una función en Matlab?		¿consideras que por tu cuenta aprenderías más sobre Matlab?	

Tabla 3.1 Encuesta de satisfacción

4. Manual de aprendizaje basado en Matlab

La herramienta informática en las que se llevarán a cabo las tareas necesarias para la resolución de problemas matemáticos que se presentan en el análisis de circuitos eléctricos se conoce como Matlab (abreviatura de MATrix LABoratory, "laboratorio de matrices") siendo un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio (M) y disponible para las plataformas Unix, Windows y Mac OS X.

Matlab es un entorno de cómputo numérico para el tratamiento y análisis de datos añadiendo, además la capacidad de cómputo simbólico en el que este manual centrará su atención. Su desarrollo comenzó a finales de 1970, ideado por Cleve Moler. En 1984 fundó MathWorks, empresa que gestiona su continua expansión en áreas como la ingeniería, la investigación o la economía con intereses tanto académico como industrial. Actualmente la distribución del software es la de Matlab 7.14 también conocida como la versión 2012a pero usaremos la sintaxis definida desde la distribución de Matlab 7 o versión R14, lanzada en junio del 2004[2].

4.1. El entorno de programa

Este es el entorno de trabajo del usuario de Matlab, figura 4.1. Cada herramienta específica del programa tiene destinado un espacio que se puede mover, redimensionar, ocultar o separar en ventanas independientes (undock).

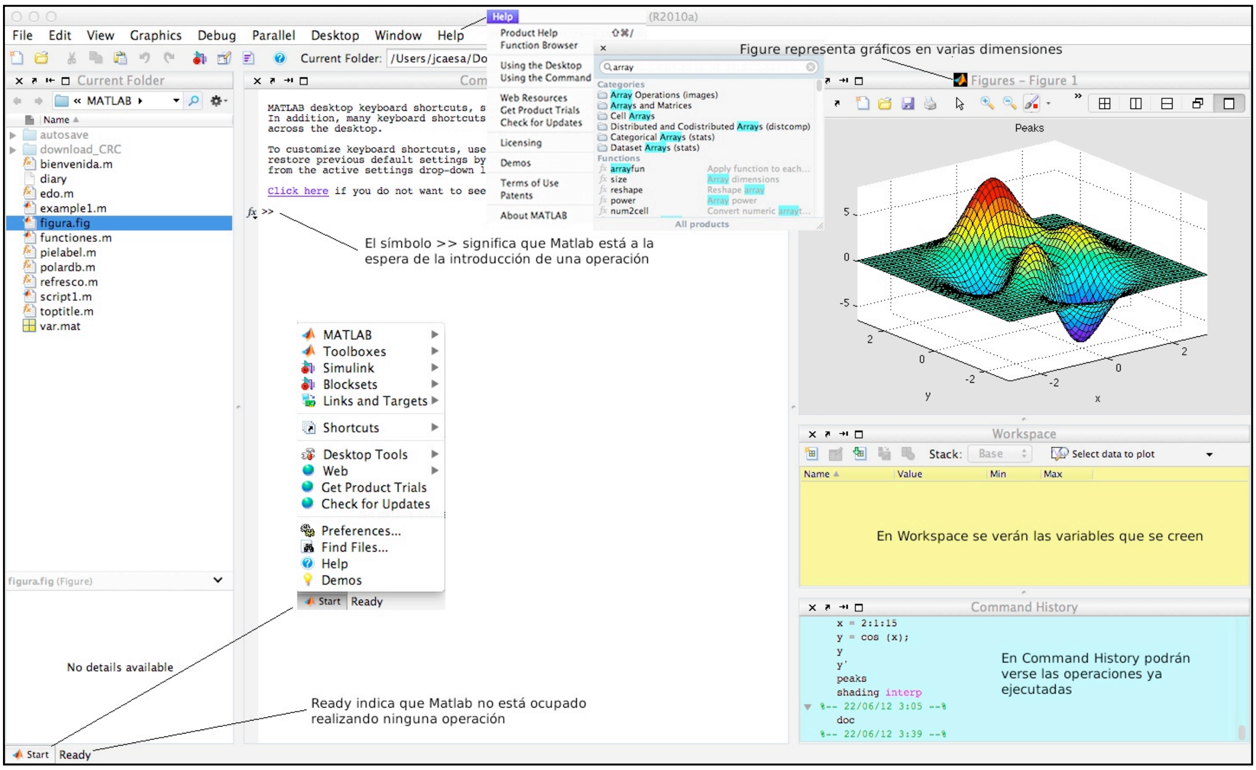


Figura 4.1. El entorno de trabajo en Matlab

[2] Consultar *Release history* en [16]: http://en.wikipedia.org/wiki/MATLAB

Estas herramientas específicas las denominaremos ventanas, en las que se desarrollarán todo tipo de fenómenos que interactuarán con el usuario. Las principales ventanas que se pueden encontrar son:

- **Command Window** (figura 4.2); espacio de trabajo donde el usuario interactúa con el programa mediante la declaración de variables u objetos y la ejecución de operaciones, funciones y scripts. Esta será principalmente la ventana de Matlab donde se desarrollarán la mayoría de actividades.

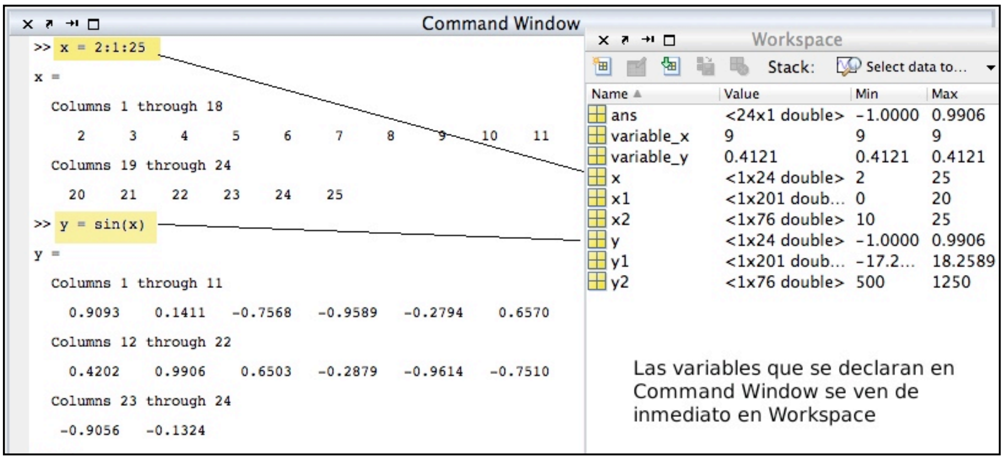


Figura 4.2. Ventana del Command Window

- **Workspace** (figura 4.3); ventana donde anidarán los datos, estos son las variables u objetos. Esta herramienta ha sido concebida para trabajar de forma autónoma, así se puedan crear y editar las variables y objetos desde el mismo. Además incorpora otras funcionalidades como importar datos, guardarlos y generar gráficos de ellos. La extensión .mat corresponde al tipo de fichero que contiene datos de Workspace. Los ficheros que se importen se alojarán en Workspace junto con las variables que puedan haberse ya creado. Los datos que se deseen conservar deben ser guardados en este tipo de fichero sino se perderán una vez cerrado el programa.

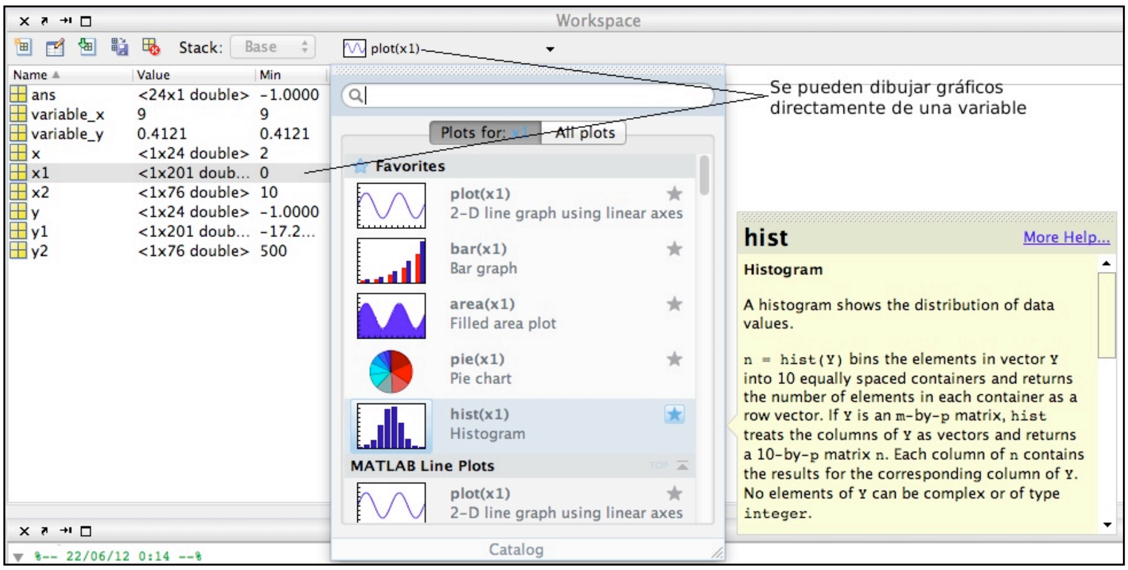


Figura 4.3. Ventana del Workspace

- **Command History** (figura 4.4); muestra el historial de operaciones que son ejecutadas en Command Window haciéndolas accesibles de nuevo al usuario permitiéndole ejecutarlas o editarlas, en un proceso sencillo en la que se seleccionan las declaraciones que se desean, bien ejecutándolas mediante el uso de la tecla *Enter* del teclado, bien editándolas simplemente arrastrándolas desde el historial hasta Command Window. El historial muestra su contenido en relación a las fechas de acceso al programa, si se da por finalizada la sesión, cerrando el programa el contenido no se perderá. No ocurrirá lo mismo en el resto del programa en el que sí se perderán los datos si no han sido guardados. No obstante, el historial no es un recurso fiable pues dispone de una memoria finita por lo que el uso intensivo del programa o en unas cuantas sesiones puede darse por perdida la información de las fechas más anteriores.

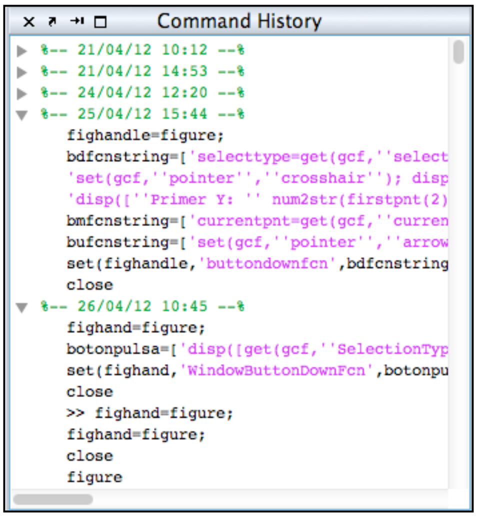


Figura 4.4. Ventana de Command History

- **Current Directory/Folder** (figura 4.5); reúne al conjunto de carpetas a las que tiene acceso Matlab, donde ubicaremos los ficheros. Siempre que se desee incluir una nueva carpeta o una existente se requerirá la autorización del usuario, la herramienta puede crear nuevos archivos, buscarlos, clasificarlos, etc. Matlab posee un tipo de archivo propio denominado M-file, con extensión .m, al que hay que sumar el tipo de fichero .mat que contiene datos, así como un tipo .fig que se definirá más adelante, todos ellos serán accesibles desde Current Directory. Además en su parte inferior hay un visor de detalles que permite visualizar información descriptiva de un M-file o los datos que contiene un fichero .mat sin necesidad de acceder a ellos previamente.

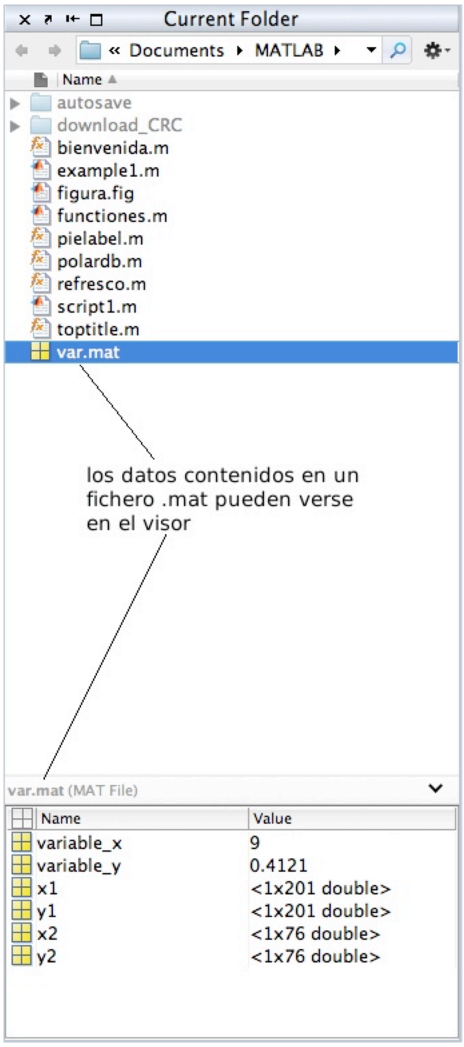


Figura 4.5. Ventana de Current Directory

- **Editor** (figura 4.6); herramienta para la edición de ficheros y la evaluación de su sintaxis. Si en el entorno del programa no aparece esta ventana basta con abrir un archivo tipo M-file, al que pertenecen tanto funciones como scripts desarrollados con Matlab. Un script es estrictamente una secuencia de comandos usados para desempeñar tareas específicas mientras que una función está condicionada generalmente por unos argumentos en su entrada que determinan su salida.

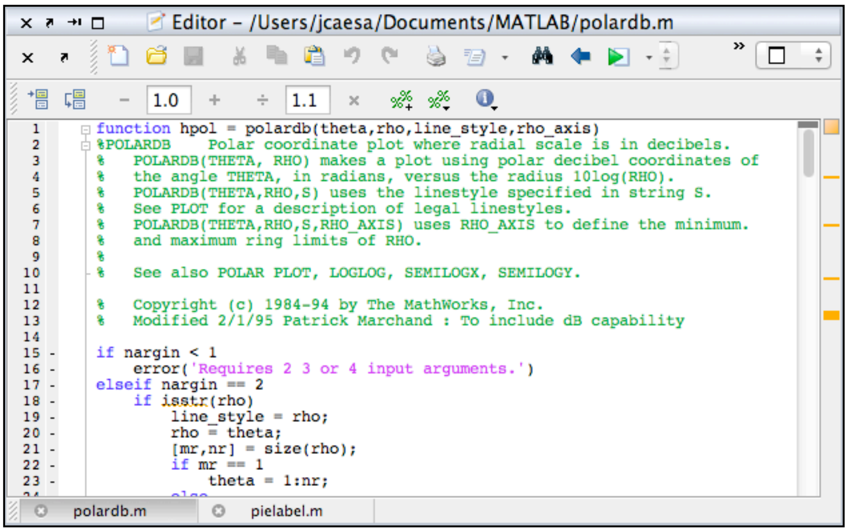
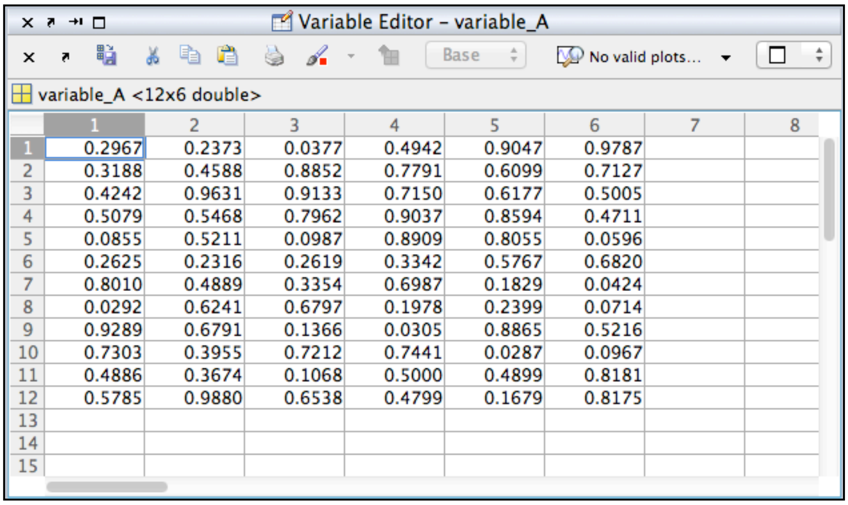


Figura 4.6 Ventana del Editor

- **Figure**; es la ventana en la que está dibujada la gráfica de la figura 4.1. También conocida como figura es en la que se representan gráficamente los datos de una o más variables mediante el uso de funciones dedicadas. Los archivos con extensión .fig son gráficos propios de Matlab.
- **Variable editor** (figure 4.7); esta herramienta muestra el contenido de las variables u objetos presentes en el Workspace, así tenemos acceso a los datos en una tabla en la que es fácil conocer la posición de cada dato que contiene una variable facilitando su edición.



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.2967	0.2373	0.0377	0.4942	0.9047	0.9787		
2	0.3188	0.4588	0.8852	0.7791	0.6099	0.7127		
3	0.4242	0.9631	0.9133	0.7150	0.6177	0.5005		
4	0.5079	0.5468	0.7962	0.9037	0.8594	0.4711		
5	0.0855	0.5211	0.0987	0.8909	0.8055	0.0596		
6	0.2625	0.2316	0.2619	0.3342	0.5767	0.6820		
7	0.8010	0.4889	0.3354	0.6987	0.1829	0.0424		
8	0.0292	0.6241	0.6797	0.1978	0.2399	0.0714		
9	0.9289	0.6791	0.1366	0.0305	0.8865	0.5216		
10	0.7303	0.3955	0.7212	0.7441	0.0287	0.0967		
11	0.4886	0.3674	0.1068	0.5000	0.4899	0.8181		
12	0.5785	0.9880	0.6538	0.4799	0.1679	0.8175		
13								
14								
15								

Figura 4.7. Ventana del Variable Editor

4.2. Ayuda en Matlab

Son muchas las funcionalidades de Matlab, es un programa tan extenso de modo que es importante discernir sobre el contenido que ha de satisfacer los objetivos de este manual. Es por este motivo la introducción de este capítulo a fin de cubrir las necesidades del usuario y las cuestiones que se le puedan plantear. Si el alumno considera insuficiente esta información debe saber que existe una extensa documentación proporcionada por Matlab, aquí describiremos la forma de acceder a esta ayuda.

Una manera de acceder rápidamente a toda esta documentación es a través de la barra de menús del programa, seleccionando Help (figura 4.8) aparecerá un menú desplegable en el podemos encontrar lo siguiente[3]:

- **Product Help**; con la se accede a una interfaz que recopila toda la documentación existente.
- **Function Browser**; que permite el uso de palabras clave que identifican categorías y funciones relacionadas además permite ver información más detallada de una función seleccionándola.
- **Using the Desktop**; está es la opción que recomendamos para aquellos que quieran extenderse en las definiciones del capítulo anterior acerca del entorno del programa.
- **Using the Command Window**; donde se dan a conocer las características que definen esta herramienta. En capítulos siguientes se explotará el potencial que nos ofrece esta herramienta.
- **Web Resources**; con accesos directos a The MathWorks Web Site y a la comunidad de usuarios.
- **Demos**; se trata de un recopilación de ejemplos documentados facilitándonos lo necesario para su evaluación como, el guión de seguimiento del ejercicio, su ejecución paso a paso en Command Window y el archivo M-file correspondiente. Además, añaden video-tutoriales para los más principiantes.

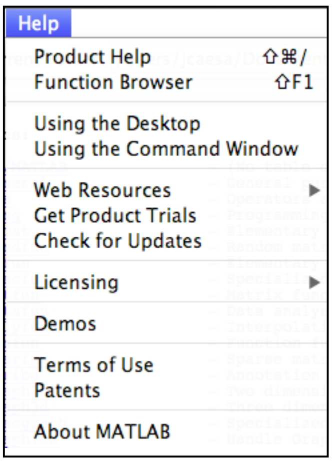


Figura 4.8. Menú desplegable

[3] Dependiendo de la versión del software y del sistema operativo utilizados es posible encontrar opciones que difieran de estas

Otra manera de acceder a toda esta documentación será mediante el uso de Command Window. Por ejemplo si tecleamos,

`help`

lo que aparecerá a continuación será un listado con todos los temas documentados. El paso siguiente será seguir el vínculo sobre el tema en el que se esté interesado el cuál mostrará las categorías contenidas en las que se encontrarán las funciones que le correspondan, finalmente estaremos delante de definición de la función que se ha rastreado. Si contamos con el nombre de la función de antemano se puede introducir asi,

`help` *nombre_de_la_función*

donde *nombre_de_la_función* es precisamente la función sobre la que estamos pidiendo información.

Muchas veces resulta mas interesante contar con más ejemplos relativos a la función que una definición por lo que recurrir a la interfaz de ayuda (figura 4.9) es al fin y al cabo el mejor método para conocerla, entonces si introducimos,

`doc`

aparecerá la interfaz de ayuda en la que se podrán distinguir dos partes bien diferenciadas, a la izquierda aparecen todos los temas documentados y a la derecha se exponen sus definiciones y sus ejemplos. Por supuesto está permitido introducir en Command Window,

`doc` *nombre_de_la_función*

en la que se vuelve de nuevo a la interfaz de ayuda mostrando la información solicitada. En la interfaz se pueden hacer estas búsquedas de funciones, si no se conocen se puede filtrar por palabras clave que puedan estar relacionadas con la función que estamos buscando, otra manera de hacer esto último en Command Window es teclear,

`lookfor` *palabra_clave*

que devuelve los vínculos de todas las informaciones relacionadas con *palabra_clave*.

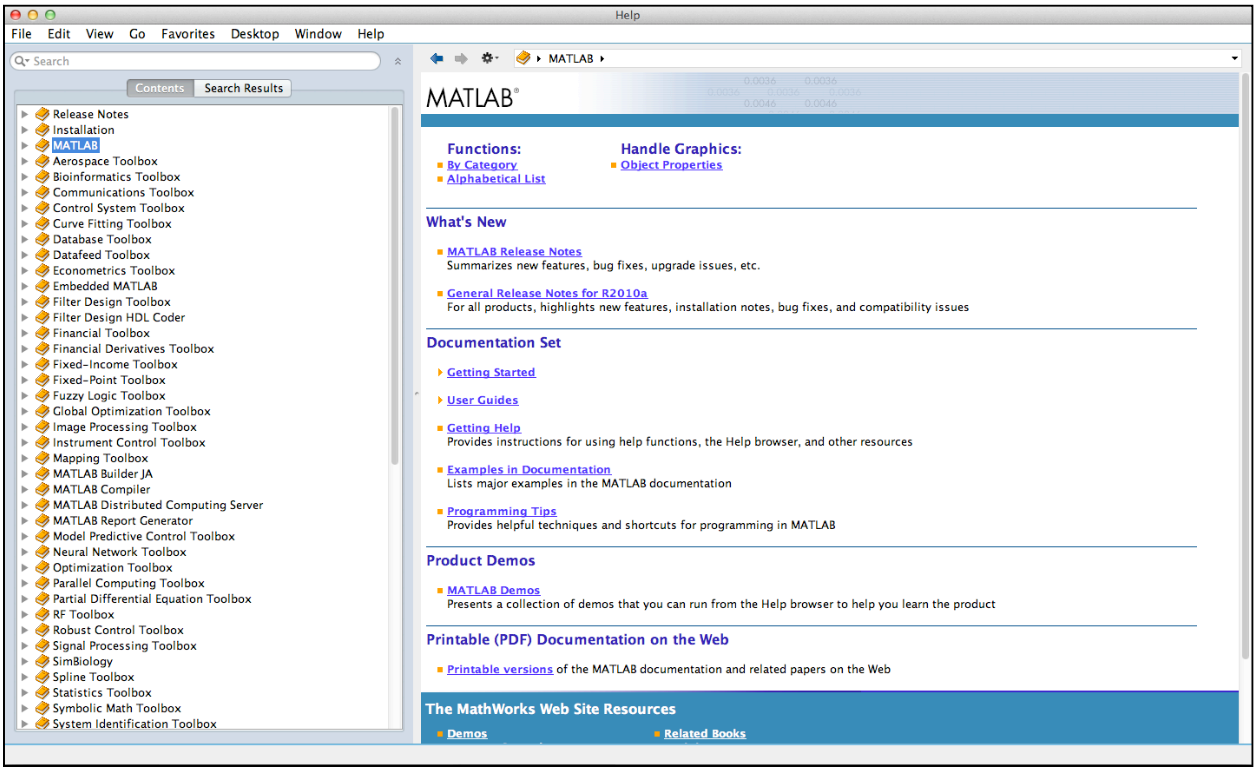


Figura 4.9 Interfaz de ayuda de Matlab

4.3. Matrices en Matlab

La aplicación más importante en Matlab es el uso y cálculo con matrices, este capítulo inicialmente introducirá el uso de expresiones algebraicas y la declaración de variables dando posteriormente paso a operaciones con matrices. Así introduciendo en Command Window, lo siguiente:

```
ptos_grupo1_Baloncesto = 3*7 + 2*11 + 1*6
```

podremos evaluar su resultado al pulsar la tecla *enter* del teclado mostrando a continuación, lo siguiente

```
ptos_grupo1_Baloncesto =

    49
```

Matlab devuelve el resultado al ejecutar la evaluación de la expresión algebraica. Se crea la variable *ptos_grupo1_Baloncesto* y se le asigna el resultado de la expresión es a partir de este momento en el que está disponible en Workspace. El nombre de una variable puede estar compuesto tanto por letras mayúsculas como minúsculas así como por números, aunque no puede empezar por una cifra ni tampoco usar espacios.

Declarar una variable asignándole un valor es tan simple como teclear,

```
a = 2.5;                                                    [a]
```

Nótese el uso del punto para definir un número con parte decimal. En Matlab la coma decimal se define con un punto, para los millares no se debe usar ninguno de ellos de hecho si se hace,

```
b = 1,000                                                   [b]
```

Veremos el siguiente resultado,

```
b =

     1


ans =

     0
```

El programa ha devuelto estos resultados en dos variables distintas, *b* y *ans*, con valores de 1 y de 0 respectivamente. Matlab acepta valores numéricos y el cálculo de operaciones sin necesidad de declarar la variable que debe almacenar el resultado, esto no quiere decir que no se asigne el resultado a ninguna variable ya que en realidad es el propio programa el que almacena el resultado en una a la que se conoce como *ans* (del inglés, answer). Tampoco quiere decir que se genere una variable por cada operación que se efectúe sin una variable para el resultado sino que estas operaciones usarán *ans* en cualquier caso sobrescribiendo un resultado tras otro hasta finalmente mostrar el de la última operación que no tiene asignada una variable para su resultado. Volviendo a [b], un valor de 0 ha sido almacenado en *ans* porque una coma (,) fue interpuesta entre 1 y 0, el programa entiende que se trata de la entrada de dos valores y no, de uno, la variable *b* a la que se asigna un valor de 1 y un valor numérico que no ha sido asignado a ninguna variable y por tanto debe almacenarse en *ans*. Una coma (,) es un separador entre datos, variables u objetos y expresiones.

El otro caso es el de punto-coma (;) que en [a] satisface el deseo del usuario de no mostrar el resultado de la expresión. Matlab devuelve el resultado de las expresiones que se ejecuten en Command Window a menos que cada expresión finalice en punto-coma (;) Así, por ejemplo

```
x = 12; y = 2*x;
```

no devuelve ningún resultado en Command Window sin embargo no quiere decir que las operaciones no se hayan efectuado, en Workspace podrán verse estas variables y sus resultados, e introduciendo

```
x, y
```

nos devolverá el valor correspondiente de cada variable

```
x =

    12

y =

    24
```

otro ejemplo es el siguiente,

```
x + y, d = 8.1; ans + d
```

devuelve los siguientes resultados,

```
ans =

    36

ans =

   44.1000
```

Se muestra el resultado de la suma de *x* e *y* en la variable *ans*, se asigna a la variable *d* un valor de 8.1 pero no aparecerá y la última expresión suma el valor contenido en *ans* con el de la variable *d* y guardar su resultado en *ans* sobrescribiéndose de nuevo, finalmente hay que decir que la coma (,) de esta última expresión es redundante pues esté o no mostrará su resultado.

Ahora definamos una matriz de la siguiente manera,

```
matriz_1 = [1, 2, 3, 4]

matriz_1 =

     1     2     3     4
```

la forma de separar un dato de otro se hace mediante coma (,) y esta matriz de 1 x 4 se dice que tiene una fila y cuatro columnas. En cambio en,

```
matriz_2 = [1; 2; 3; 4]
```

```
matriz_2 =

     1
     2
     3
     4
```

se usa punto-coma (;) para separar los datos, ya que se trata de una matriz de 4 x 1, con cuatro filas y una columna. Así es, otra función de punto-coma (;) es separar los datos en filas de un matriz. Existe una relación entre las dos matrices que hemos creado, se dice que una matriz es traspuesta de la otra y viceversa cumpliendo así unas propiedad[4] como la siguiente,

```
matriz_1 = [1 2 3 4]'

matriz_1 =

     1
     2
     3
     4
```

la matriz traspuesta se denota con el apóstrofo (') obsérvese como el resultado es exactamente es mismo que el de *matriz_2* cumpliendo así con una de sus propiedades. Además resulta que se puede prescindir de la coma (,) y es suficiente un espacio para separar un dato de otro, por el contrario es indispensable el uso de punto-coma (;) para que el programa entienda que un dato está en otra fila, como en el ejemplo siguiente

```
M = [1 2 3; 4 5 6]

M =

     1     2     3
     4     5     6
```

en el que tenemos una matriz de 2 x 3, el caso es que utilizamos punto-coma (;) como indicador para un de cambio de fila en la matriz. En este otro ejemplo, se creará una matriz de tres filas usando el mismo número de elementos que la matriz *M*,

```
N = [1 2; 3 4; 5 6]

N =

     1     2
     3     4
     5     6
```

[4] Consultar en [16]: http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_traspuesta

esta es una matriz de 3 x 2 que posee seis elementos como la matriz *M* pero hace uso de otra distribución entre filas y columnas. Se puede sumar esta matriz con otra siempre que el número de filas y de columnas sea igual en ambas matrices, entonces

```
F = [9 8; 7 6; 5 4];
F = F + N

F =

    10     10
    10     10
    10     10
```

En el caso de la multiplicación entre matrices[5] la regla consiste en, dadas las matrices *A* y *B*, el producto matricial de *A* por *B* se puede calcular si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz. Si se satisface, entonces el resultado del producto de *A* por *B* es una matriz con el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda. Esto es, el producto de la matriz *A* de 2 x 3 por la matriz *B* de 3 x 2 es una matriz de 2 x 2, resolviéndose de esta manera,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}) \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31}) & (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32}) \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

En el caso del producto matricial de *M* por *N* se obtiene el resultado, expresado en la variable *T*, introduciendo en Matlab

```
T = M * N

T =

    22     28
    49     64
```

[5] Consultar en [5] Apéndice 2: Matrices

resolviéndose de esta manera,

$$T = M \cdot N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5) & (1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6) \\ (4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5) & (4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Obsérvese como el producto de la matriz *N* por *M*, también puede calcularse

```
R = N * M

R =

     9    12    15
    19    26    33
    29    40    51
```

sin embargo su resultado es diferente ya que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Por otro lado, el producto de la matriz *R* por *N* se puede calcular

```
R * N

ans =

   120   156
   262   340
   404   524
```

porque siendo la matriz *R* de 3 x 3 y la matriz *N* de 3 x 2, se cumple que el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda. No pasa lo mismo en el producto de *N* por *R* que no puede calcularse porque infringe esta condición por lo que se dice que el producto no está definido.

4.4. Determinantes en Matlab

Una matriz no tiene un valor, es un arreglo ordenado de elementos, sin embargo tratándose de una matriz cuadrada de orden *n* o simplemente una matriz *n* por *n* (con el mismo número de filas y de columnas) se aplica la forma del determinante de una de matriz de este tipo que sí tiene un valor[6] simbolizándose de esta manera,

[6] Consultar en [5] Apéndice 1: Determinantes

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$$

(4.5)

Δ_G es el determinante de la matriz cuadrada G y para obtener su valor hay que expandirlo en término de sus menores, esto se hace eligiendo una fila y operando de la siguiente manera

$$\Delta_G = \sum g_{jk} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \Delta_{jk}$$

(4.6)

donde j corresponde al número de fila y k al número de columna. Al determinante que aparece a la derecha de la igualdad se le conoce como menor y es el determinante resultante que se obtiene de eliminar la fila j y la columna k, esto se indica por Δ_{jk}. Por ejemplo, en el caso de elegir la primera fila

$$\Delta_G = g_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + g_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} g_{21} & g_{23} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} + g_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}$$

(4.7)

de nuevo, se debe operar expandiendo los determinantes en términos de sus menores, en este caso se tratan de determinantes de orden 2. El menor de un determinante de orden 2 es simplemente el elemento que quede de eliminar la fila y columna que le corresponde. Así, finalmente nos queda

$$\begin{aligned}\Delta_G = g_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot (g_{22} \cdot (-1)^{1+1} \cdot g_{33} + g_{23} \cdot (-1)^{1+2} \cdot g_{32}) + g_{12} \cdot (-1)^{1+2} \\ \cdot (g_{21} \cdot (-1)^{1+1} \cdot g_{33} + g_{23} \cdot (-1)^{1+2} \cdot g_{31}) + g_{13} \cdot (-1)^{1+3} \\ \cdot (g_{21} \cdot (-1)^{1+1} \cdot g_{32} + g_{22} \cdot (-1)^{1+2} \cdot g_{31})\end{aligned}$$

(4.8)

la expansión por menores es válida para determinantes de cualquier orden. En el caso de determinantes de orden 3 como el de la matriz G la operación resulta aún más sencilla,

$$\Delta_G = g_{11} \cdot (g_{22} \cdot g_{33} - g_{23} \cdot g_{32}) - g_{12} \cdot (g_{21} \cdot g_{33} - g_{23} \cdot g_{31}) + g_{13} \cdot (g_{21} \cdot g_{32} - g_{22} \cdot g_{31})$$

(4.9)

$$\Delta_G = g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33} - g_{11} \cdot g_{23} \cdot g_{32} - g_{12} \cdot g_{21} \cdot g_{33} + g_{12} \cdot g_{23} \cdot g_{31} + g_{13} \cdot g_{21} \cdot g_{32} - g_{13} \cdot g_{22} \cdot g_{31}$$

(4.10)

$$\Delta_G = g_{11} \cdot g_{22} \cdot g_{33} + g_{12} \cdot g_{23} \cdot g_{31} + g_{13} \cdot g_{21} \cdot g_{32} - (g_{13} \cdot g_{22} \cdot g_{31} + g_{12} \cdot g_{21} \cdot g_{33} + g_{11} \cdot g_{23} \cdot g_{32})$$

(4.11)

esta forma es conocida como la regla de Sarrus[7] y no puede aplicarse a determinantes de matrices de orden superior a 3. Por ejemplo, el valor del determinante de una matriz *D* es,

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 9 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \tag{4.12}$$

$$\Delta_D = 4 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 9 \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) \cdot 1 - (1 \cdot 5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) \cdot 6 + 4 \cdot 9 \cdot 1) \tag{4.13}$$

$$\Delta_D = 91 \tag{4.14}$$

En Matlab el determinante de una matriz, como Δ_D, se calcula con la función *det*, lo vemos a continuación

```
D = [4 2 1; -3 5 9; -2 1 6];
det(D)

ans =

    91
```

4.5. Regla de Cramer

A continuación se definirá la regla de Cramer[8], la cuál permite conocer los valores de variables incógnitas en un sistema lineal de ecuaciones. En la resolución a un problema de análisis de circuitos tenemos este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,

$$a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + a_{13} \cdot X_3 = b_1 \tag{4.15}$$

$$a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + a_{23} \cdot X_3 = b_2 \tag{4.16}$$

$$a_{31} \cdot X_1 + a_{32} \cdot X_2 + a_{33} \cdot X_3 = b_3 \tag{4.17}$$

[7] Consultar en [16]: http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Sarrus

[8] Consultar en [16]: http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Cramer

donde las X representan tensiones o intensidades incógnitas, las a están determinadas por parámetros del circuito (conductancias[9] y demás) y b son términos de fuentes de señal de entrada conocidos que accionan el circuito (a los que llamamos términos independientes). La regla de Cramer constituye un método sistemático que nos permite escribir el proceso de solución de una manera particular representando, en primer lugar, el sistema de ecuaciones en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

si se resuelve el producto matricial se puede comprobar como el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas ha sido representado convenientemente de esta manera porque la regla de Cramer resuelve y da solución de las variables incógnitas expresadas como,

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_G} \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} \qquad X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} \tag{4.19}$$

donde

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4.20}$$

Δ_G se conoce como el determinante de la matriz de conductancias. Δ_1 se define como el determinante que se obtiene cuando las conductancias de la primera columna de Δ_G se sustituyen por los términos independientes del sistema de ecuaciones, Δ_2 se obtiene al sustituir la segunda columna de Δ_G por los términos independientes y finalmente Δ_3 se obtiene al sustituir la tercera columna de Δ_G por estos términos independientes, así

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \tag{4.21}$$

La regla de Cramer es aplicable a un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Por ejemplo, el siguiente sistema de tres ecuaciones con 3 incógnitas se obtuvo para un circuito dado[10]

---

[9] la conductancia es la propiedad inversa de la resistencia eléctrica

[10] Consultar página 57 en [5]

$$7 \cdot v_1 - 3 \cdot v_2 - 4 \cdot v_3 = -11 \tag{4.22}$$

$$-3 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 = 3 \tag{4.23}$$

$$-4 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 + 11 \cdot v_3 = 25 \tag{4.24}$$

expresado en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \\ 25 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

fácilmente se obtienen las tensiones por la regla de Cramer,

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_G} \qquad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} \qquad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} \tag{4.26}$$

siendo los determinantes,

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix} \tag{4.27}$$

de nuevo se pueden hallar las soluciones con ayuda de Matlab, por ejemplo, usando el método siguiente

```
G = [7 -3 -4; -3 6 -2; -4 -2 11];
C1 = [-11 -3 -4; 3 6 -2; 25 -2 11];
C2 = [7 -11 -4; -3 3 -2; -4 25 11];
C3 = [7 -3 -11; -3 6 3; -4 -2 25];
v1 = det(C1/G)

v1 =

    1.0000

v2 = det(C2/G)

v2 =

    2.0000
```

```
v3 = det(C3/G)

v3 =

    3.0000
```

Sin embargo no puede considerarse este método el más sencillo y si el más laborioso pues necesita la declaración de un total de cuatro matrices, siendo una la matriz de conductancia *G* y las otras restantes las que se obtienen de esta y de la matriz de términos independientes, además hay que conjugar los determinantes que definen cada voltaje. Así, este otro método[11] puede considerarse más rápido e intuitivo,

```
G = [7 -3 -4; -3 6 -2; -4 -2 11];
T = [-11; 3; 25];
v = G\T

v =

    1.0000
    2.0000
    3.0000
```

fijándonos bien es suficiente con la declaración de la matriz de conductancias *G* y la matriz de términos independientes *T* del sistema de ecuaciones. Por otra parte, en Matlab se usa la barra inversa (\) para expresar el producto matricial de la inversa[12] de *G* por *T*, en efecto si expresamos las matrices tal que

$$G \cdot v = T \tag{4.28}$$

donde se define la matriz de tensiones *v* que contiene las variables incógnitas, entonces

$$v = G^{-1} \cdot T \tag{4.29}$$

G^{-1} es la matriz inversa de *G* y gracias a sus propiedades[13] es posible el producto matricial que resuelve la ecuación pues la *división* no es posible en una operación con matrices. Por tanto, la expresión se resuelve sobre la matriz *v* que contiene la solución para las tres incógnitas, si se desea expresar de uno en uno los resultados hay que indicar la posición del dato dentro de la matriz de esta manera,

$$v(j, k) \tag{4.30}$$

---

[11] Consultar página 280 en [4]

[12] Consultar en [16]: http://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_inversa

[13] La matriz inversa es igual al cociente de la matriz traspuesta adjunta de *G* por el determinante de la matriz *G*, se trata por tanto del producto de una matriz por un escalar pues el determinante de la matriz G puede ser expresada como una fracción

donde j indica el número de fila y k el número de columna donde se ubica el dato dentro de la variable v. En este caso para devolver v_2 escribiremos,

```
v(2,1)

ans =

    2.0000
```

Este método de resolución basado en la regla de Cramer referente a un sistema de tantas ecuaciones independientes como incógnitas, se puede aplicar en el análisis de circuitos electrónicos basados en sistemática de mallas y el de nudos. En este caso la matriz 4.20 se llama de resistencias o de conductancias para el caso de sistemática de nudos y la matriz b_{11}, b_{22}, b_{33} de la 4.18 la de fuentes independientes. Las incógnitas de las corrientes de malla o de tensiones de nudo se pueden resolver mediante este sistema y aplicando el software Matlab de la forma que se ha descrito aquí.

4.6. Ecuaciones diferenciales

En pocas palabras, una ecuación diferencial es una ecuación donde aparece la incógnita y alguna de sus derivadas[14]. Por ejemplo,

$$y \cdot x + 2 \cdot y \cdot \sin x = x + 1 \tag{4.31}$$

Si consideramos y como la incógnita, esta no es una ecuación diferencial, ya que no aparece ninguna derivada y', y'', etc. En cambio

$$y' + x \cdot \sin x = 1 \tag{4.32}$$

es una ecuación diferencial porque aparece y', que representa la derivada de y respecto de x, y se trata de una ecuación diferencial ordinaria, de primer orden y lineal:

- Es ordinaria porque la solución, $y(x)$, es función de una única variable, x.
- Es de primer orden porque, como máximo, aparece la derivada de primer orden, y'.
- Es lineal porque y y sus derivadas aparecen linealmente, es decir, no tenemos productos como $y.y'$ o y^3, ni funciones como $1/(1+y)$ o $\sin y$.

[14] Consultar en [1]

Por abreviar, las ecuaciones diferenciales ordinarias se conocen como EDO y pueden resolverse utilizando Matlab de la siguiente manera,

```
y = dsolve('Dy + x * sin(x) = 1','x')

y =

C2 + x - sin(x) + x*cos(x)
```

donde *dsolve* es la función que devuelve la solución general de una EDO. La ecuación diferencial se escribe entre comillas simples (‘’) así como la variable de la que es función, x. Dy es la forma de representar la derivada de y.

La solución[15] es una expresión que contiene una constante, $C2$. Esta es una característica esencial de las EDO, la existencia de infinitas soluciones, en nuestro caso una por cada valor de $C2$. Esta expresión resultante con constante $C2$ es conocida como la solución general mientras que para un valor especifico de $C2$ se conoce como una solución particular. Por ejemplo, para $C2 = -1$ obtenemos

```
y = dsolve('Dy+x*sin(x) = 1','y(0) = -1','x')

y =

x - sin(x) + x*cos(x) - 1
```

con dsolve podemos definir las condiciones iniciales de la EDO y dar así, con la solución particular. En este caso, por la simplicidad de la solución general se puede calcular el valor de la constante $C2$ sabiendo que $x = 0$ e $y(0) = -1$.

Ahora, consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales, en el que no solo se tiene una incógnita sino diversas y tantas EDO como incógnitas hay. Se supone que todas las incógnitas son función de la misma variable, respecto a la cuál se calculan las derivadas. Por ejemplo,

$$\dot{x} = y + t \tag{4.33}$$

$$\dot{y} = 2 \cdot t^2 \tag{4.34}$$

$$\dot{z} = y + x \tag{4.35}$$

es un sistema de tres EDO, de primer orden y lineales. La solución viene dada por tres funciones de la variable t, respecto a la cual se deriva $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$. Resolviendo en Matlab:

[15] Matlab utiliza un tipo especial de variable (*sym*) que permite almacenar expresiones matemáticas de carácter simbólico. La función *dsolve* devuelve la solución a una EDO utilizando este tipo de variable.

```
eq = dsolve('Dx = y + t','Dy = 2 * t^2','Dz = y + x')

eq =

    z: [1x1 sym]
    y: [1x1 sym]
    x: [1x1 sym]
```

la solución general para las incógnitas *x*, *y* y *z* se guardan en una matriz, *eq*. En este caso no se ha definido la variable de la que son función las incógnitas porque para la función *dsolve*, por defecto, lo es la variable *t*.

Se debe considerar al definir varias EDO con *dsolve* que la variable que almacenará su solución será la propia incógnita (cerciórese para cada EDO una incógnita diferente) Además al tratarse de varias soluciones *dsolve* recopilará todas sus variables incógnita en un tipo de matriz particular[16], en este caso se ha asignado a la matriz *eq* y su contenido son las variables incógnitas *z*, *y*, *x*.

z, *y* y *z* son las variables agrupadas en *eq*, la manera de acceder a sus datos es con *funcio.z*, *funcio.y* y *funcio.z* respectivamente, nótese el uso del punto (.) para referirse a una variable agrupada.

Veamos la solución del sistema,

```
x = eq.x

x =

t^4/6 + t^2/2 + C6*t - C6 + C7

y = eq.y

y =

(2*t^3)/3 + C6

z = eq.z

z =

t^5/30 + t^4/6 + t^3/6 + (C6*t^2)/2 + C7*t + C5
```

4.7. Circuito RC solución con Matlab del método clásico de análisis.

El equilibrio de todo circuito es siempre el resultado de condiciones impuestas de dos tipos:

1. impuestas a las conexiones (leyes de Kirchhoff)
2. impuestas a los dispositivos (ecuaciones de los elementos)

[16] Una estructura es un tipo de matriz que permite agrupar todo tipo de variables con los datos que contienen

La principal diferencia en el caso de los circuitos con memoria (condensadores o inductores) es que el equilibrio es dinámico y el proceso de formulación lleva a ecuaciones diferenciales en vez de a las ecuaciones algebraicas que caracterizan a los circuitos sin memoria (solo con fuentes y resistencias).

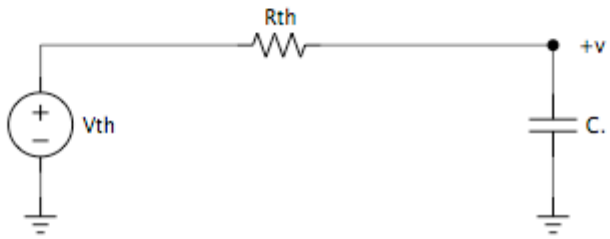


Figura 4.10. Circuito RC

Los circuitos con memoria más sencillos son los de primer orden que contienen un solo condensador o una sola bobina. Las agrupaciones de resistencias y fuentes se pueden siempre sustituir por un equivalente de Thévenin o Norton, con lo que se reduce el problema a los circuitos simples.

No es necesario estudiar el circuito RL pues los circuitos de este tipo son un ejemplo de dualidad y se puede pasar de una ecuación a otra si efectuamos las siguientes sustituciones[17]:

$$R_{Th} \leftrightarrow G_N \quad C \leftrightarrow L \quad v \leftrightarrow i \quad v_{Th} \leftrightarrow i_N \tag{4.36}$$

Por tanto, en lo que sigue, nos centraremos en el circuito RC (figura 4.10).

Para formular la ecuación diferencial del circuito resistencia-capacidad (RC), notemos que el circuito con fuente equivalente de Thévenin está regido por la condición

$$V_{th} = R_{th} \cdot i + v \tag{4.37}$$

mientras que el condensador se caracteriza por la condición

$$i = C \cdot \frac{dv}{dt} \tag{4.38}$$

[17] consultar páginas 353-355 en [13]

Entonces si la entrada al circuito RC genérico es una sinusoide con una condición inicial (representada por un interruptor conmutando en $t = 0$) figura 4.11, tal que

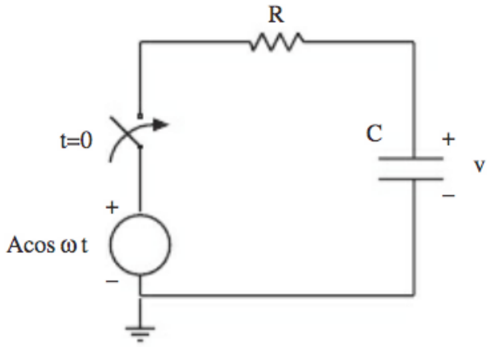


Figura 4.11. Circuito RC con condición inicial

$$V_{th} = A \cdot \cos(w \cdot t)$$

(4.39)

$$R_{th} = R$$

(4.40)

$$v(t = 0) = V_o$$

(4.41)

la ecuación diferencial del circuito se podrá escribir en la forma

$$A \cdot \cos(w \cdot t) = R \cdot C \cdot \frac{dv}{dt} + v$$

(4.42)

Llegados a este punto la solución temporal requiere el empleo del método clásico descomponiendo la solución en dos partes, la respuesta natural y la respuesta forzada. La primera parte representa la tendencia natural del circuito con entrada nula (ecuación homogénea) y la segunda requiere el método de los coeficientes indeterminados, el caso es que la solución de $v(t)$[18] coincidirá de igual manera que si se hace con Matlab,

```
v = dsolve('A * cos(w * t) = R * C * Dv + v','v(0) = Vo')

v =
```

[18] Consultar página 354 en [13]

```
(Vo - A/(C^2*R^2*(1/(C^2*R^2) + w^2)))/exp(t/(C*R)) +
                 + (A*(w*sin(t*w) + cos(t*w)/(C*R)))/(C*R*(1/(C^2*R^2) + w^2))
```

cuando la solución se encuentre poco ilustrativa existe una forma de mejorar lo representado,

```
pretty(v)

               A
  Vo - ----------------------
        2  2 /    1      2 \
       C   R  | ----- + w  |       /              cos(t w) \
              |   2  2     |    A | w sin(t w) + -------- |
              \ C   R      /       \                C R    /
  ------------------------- + ---------------------------
             /  t  \                    /    1      2 \
          exp| --- |                C R | ----- + w   |
             \ C R /                    |   2  2      |
                                        \ C   R       /
```

La función *pretty* se utiliza para mostrar de forma más ilustrativa expresiones simbólicas, su única restricción es que sólo puede operar sobre una variable a la vez.

Si aún no lo encontramos nada ilustrativo, se sugiere usar

```
v = simple(v)

v =

Vo/exp(t/(C*R))+(A*cos(t*w)-A/exp(t/(C*R))+A*C*R*w*sin(t*w))/(C^2*R^2*w^2+1)

pretty (v)

                                   A
               A cos(t w) - ---------- + A C R w sin(t w)
                               /  t  \
                            exp| --- |
      Vo                       \ C R /
  ---------- + ------------------------------------------
     /  t  \                     2  2  2
  exp| --- |                    C   R   w   + 1
     \ C R /
```

La función *simple* simplifica aún más la solución.

Veamos otro ejemplo (figura 4.12); se cierra el interruptor de la figura en t = 0, hallar la respuesta resultante $v_c(t)$.

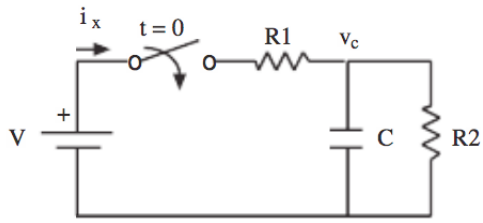


Figura 4.12. Circuito con *R* en paralelo con *C*

La tensión de Thévenin vista por el condensador es, por divisor de tensión

```
syms R1 R2 V
Vth = V * R2 / (R1 + R2)

Vth =

(R2*V)/(R1 + R2)
```

La resistencia de Thévenin (interruptor cerrado y fuente desconectada) la constituyen dos resistencias en paralelo,

```
Rth = (R1 * R2) / (R1 + R2)

Rth =

(R1*R2)/(R1 + R2)
```

Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff y la ecuación característica que define la corriente en un condensador se obtiene la EDO,

```
vc = dsolve('Vth = Rth * C * Dvc + vc','vc(0) = Vo')

vc =

Vth + (Vo - Vth)/exp(t/(C*Rth))
```

Hasta el momento nos hemos limitado a utilizar *dsolve* para el análisis de EDO, sin embargo, Matlab puede evaluar cualquier tipo de expresión de forma simbólica. Para hacerlo hay que emplear la función *syms* de manera que se definan las variables involucradas en la expresión que se quiere construir. Debe quedar claro que es obligatorio declarar las variables que operan entre ellas, pero no aquellas variables a las que se asignen, aún así se recomienda declarar todas las variables que intervengan en el análisis.

Si los valores de los elementos del circuito de la figura 4.12 fuesen, $V = 20 \cdot \mathrm{sen}(1000 \cdot t)$, $R1 = R2 = 4\ \mathrm{k}\Omega$, $C = 1\ \mu\mathrm{F}$, con la condición inicial, $v_c(t = 0) = V_o = 0$, podemos sustituirlos en las ecuaciones resultantes de la siguiente manera,

```
R1 = 4e3; R2 = 4e3;
Rth = (R1 * R2) / (R1 + R2)

Rth =

        2000

syms t
V = 20 * sin(1000 * t)

V =

20*sin(1000*t)

Vth = V * R2 / (R1 + R2)

Vth =

10*sin(1000*t)

vc = dsolve('10 * sin(1000 * t) = 2e3 * 1e-6 * Dvc + vc','vc(0) = 0')

vc =

4/exp(500*t) - 4*cos(1000*t) + 2*sin(1000*t)
```

En Matlab se pueden cambiar los tipos de las variable; si en un principio fueron definidos en syms las variables simbólicas $R1$ y $R2$ se modifican, al haberles asignado valores, al tipo de variables numéricas[19]. Así, operando de nuevo con $R1$ y $R2$ el resultado fuerza a R_{th} a convertirse en variable numérica.

Por otra parte, la fuente de tensión V es una sinusoide en función del tiempo, lo que nos obliga a operar con la variable simbólica t. Como anteriormente no se uso t hay que declararla con *syms* antes de expresar el valor (simbólico) de V y calcular[20] la tensión V_{th}.

Finalmente, se vuelve a evaluar la EDO sustituyendo V_{th}, R_{th}, C y V_o por sus respectivos valores en la función *dsolve* para hallar la solución de v_c. En este caso, no hay más remedio que escribir la ecuación con los valores en vez de usar las variables, esto es así porque una expresión definida mediante comillas simple (‘’) es interpretada por Matlab como si te tratase de una línea de texto, sin embargo al ser utilizada por *dsolve* Matlab es capaz de evaluarla como una EDO pero sin asociarla a otras partes del programa.

Podemos concluir diciendo que, la EDO del circuito RC

$$10 \cdot \sin(1000 \cdot t) = 2 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-6} \cdot \frac{dv_c}{dt} + v_c \tag{4.43}$$

tiene como solución de v_c,

$$v_c = 4 \cdot e^{-500t} - 4 \cdot \cos(1000 \cdot t) + 2 \cdot \sin(1000 \cdot t) \tag{4.44}$$

---

[19] Por defecto Matlab evalúa la variable y la interpreta como un número representado en coma flotante, el cambio puede apreciarse en Workspace

[20] Las operaciones con la variable simbólica t implican que las tensiones V y V_{th} también sean variables simbólicas, véase en Workspace

Notemos de la EDO como el término independiente es la entrada equivalente de Thévenin y no la V de la fuente de entrada original. Asimismo, podemos deducir de la solución que está compuesta por dos componentes; la exponencial (siendo la respuesta natural del circuito) que disminuye con el tiempo tendiendo a cero y, la componente seno-coseno (respuesta forzada) que llegará a confundirse con la respuesta total (solución del circuito) a lo largo del tiempo, con lo que el circuito se acomoda a un estado estacionario sinusoidal. Lo mejor es verlo gráficamente, escribiendo en Command Window

```
figure
hold on
fplot('4/exp(500*t) - 4*cos(1000*t) + 2*sin(1000*t)',[0 12e-3])
fplot('4/exp(500*t)',[0 12e-3], '--g')
fplot('- 4*cos(1000*t) + 2*sin(1000*t)',[0 12e-3],'--r')
xlabel('t (ms)')
legend('Respuesta total (vc)', 'Respuesta natural', 'Respuesta forzada')
grid
hold off
```

El resultado gráfico será visualizado en una nueva ventana, figura 4.13.

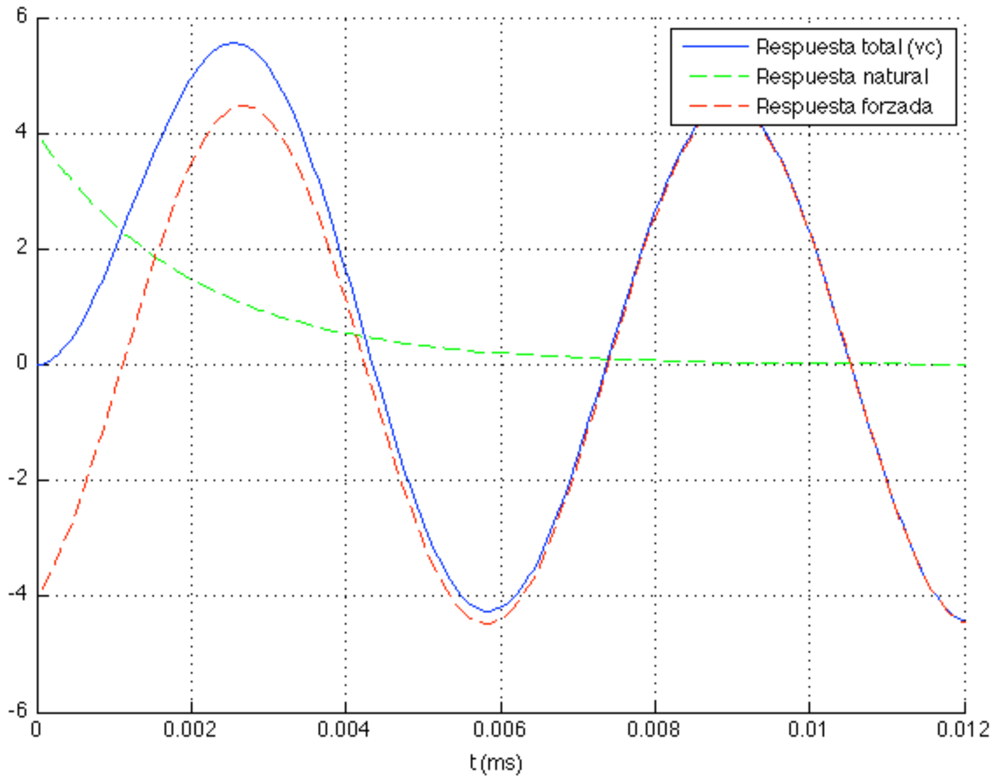


Figura 4.13. Respuesta de la señal vc y de sus componentes, respuesta natural y respuesta forzada

El comando *fplot* puede representar una función dentro de los límites solicitados. Sus argumentos son, por tanto, la expresión entre comillas simples (‘’) y los límites que hay que definir entre corchetes [ ]. Además podemos definir con que tipo de línea y color se van a dibujar las señales[21].

La leyenda de las funciones representadas exige el uso de legend y el texto que se desee mostrar sigue el mismo orden de construcción de las gráficas. En cambio, *xlabel* representa el texto en el eje de abscisas.

Figure es la ventana en la que está representada la señal y *hold on* es una función que permite representar más de una gráfica en la misma ventana, si no se usa *hold* entonces una gráfica se sobrescribiría en otra anterior. Si no se desea introducir más señales en la ventana se recomienda usar *hold off*. Para usar una ventana nueva de dibujo, sin borrar la anterior, basta con escribir *figure* de nuevo.

La función *grid* activa o desactiva la rejilla o líneas de puntos entre los ejes de coordenadas.

4.8. EDO lineales de segundo orden y circuito RLC

Una ecuación diferencial de segundo orden es toda relación entre una función incógnita y(x), sus derivadas primera y segunda, y’(x), y’’(x) y la variable independiente x que se puede escribir de la forma

$$y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = b(x) \tag{4.45}$$

donde $a_i(x)$ para $i = 0, 1$ y $b(x)$ son funciones continuas en cierto intervalo abierto *I* real[22]. Las funciones $a_i(x)$ se llaman coeficientes de la ecuación. La función $b(x)$ es el término independiente. Si,

$$b(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.46}$$

diremos que la ecuación es homogénea. En caso contrario diremos que es no homogénea.

Los circuitos de memoria doble sirven de vehículo para el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Por memoria doble queremos significar que el circuito contiene al menos dos elementos con memoria que no se pueden combinar para dar un elemento único equivalente con memoria. Aún cuando el número de tales circuitos es ilimitado, centraremos nuestra atención en las forma canónica clásica: el circuito RLC en serie.

[21] Para ver todas las especificaciones, escribir en Command Window, doc linespec

[22] Consultar en [16]: http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_(matemática)

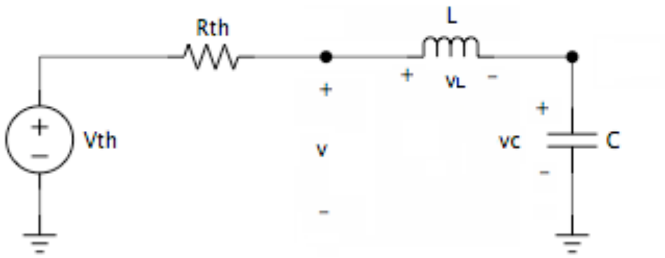


Figura 4.14. Circuito RLC en serie

En la figura 4.14 la bobina y el condensador están conectados en serie y el circuito fuente-resistencia se puede reducir a su equivalente de Thévenin (Rth y Vth). Lo primero que vamos a hacer es escribir las ecuaciones que describen el equilibrio de este circuito

$$V_{th} = R_{th} \cdot i + v \tag{4.47}$$

$$v = v_L + v_C \tag{4.48}$$

$$v_L = L \cdot \frac{d i_L}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{4.49}$$

$$i = i_C = C \cdot \frac{d v_C}{dt} \tag{4.50}$$

Hemos escrito cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (i, v, v_L, v_C). Ello indica que se pueden eliminar todas las variables menos una y nuestro problema se reduce a seleccionar una variable adecuada para la solución, esta es la tensión en el condensador. Para aislar v_C sustituiremos primeramente las ecuaciones 4.48 y 4.50 en la ecuación 4.47.

$$V_{th} = R_{th} \cdot C \cdot \frac{dv_C}{dt} + v_L + v_C \tag{4.51}$$

Esta sustitución nos elimina todo menos v_L. Para eliminar la tensión en la bobina sustituiremos la ecuación 4.50 en la 4.49 y obtendremos

$$v_L = L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2}$$

(4.52)

Al sustituir este resultado en la ecuación 4.51, resulta

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2} + R_{th} \cdot C \cdot \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_{th}$$

(4.53)

Esta es la ecuación diferencial lineal de segundo orden en la que la variable dependiente es la tensión en el condensador . Una vez obtenida v_C de esta ecuación, podemos marchar hacia atrás en nuestro análisis para determinar cualquier otra tensión o intensidad del circuito que podamos necesitar. En realidad, podríamos haber deducido una ecuación diferencial en la cual la variable dependiente fuese cualquiera otra variable de señal. Si lo hubiéramos hecho, el primer miembro de la ecuación tendría la misma forma de la ecuación 4.53, pero el segundo miembro contendría derivadas de la entrada V_{th}. Como esto podría ser poco elegante, tomamos para variable de solución la tensión del condensador.

Al tratar la ecuación 4.53 encontraremos que la solución depende de tres tipos de cosas:

1. Naturaleza de la señal de entrada (V_{th}).
2. Valores de los parámetros del circuito (R_{th}, L, C).
3. Valores de la tensión en el condensador y de la intensidad de la corriente que recorre la bobina en $t = 0$, que representaremos por V_o e I_o respectivamente (siendo las llamadas variables de estado).

Las dos primeras categorías no deberían sorprender pues tales cosas también influyen en la respuesta de los circuitos sin memoria. La última categoría de las llamadas variables de estado indica que el circuito tiene memoria. Es decir, su respuesta se ve influida por lo que ha sucedido en el pasado, representado por la energía almacenada en el condensador $(1/2)\cdot C\cdot V_o^2$ y en la bobina $(1/2)\cdot L\cdot I_o^2$ en $t = 0$, instante en el que hemos iniciado la solución.

Entre las consecuencias de la memoria doble se cuenta que el circuito puede tener una respuesta aún cuando la señal de entrada sea idénticamente nula para $t > 0$. Para aclarar esta característica[23] veamos el siguiente ejemplo.

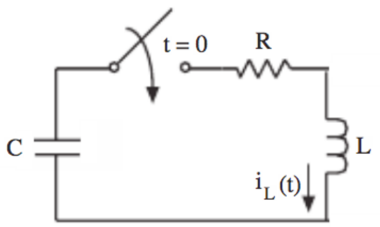


Figura 4.15 Circuito RLC sin fuente

El circuito de la figura 4.15 es un circuito RLC en serie en el cual se cierra el interruptor en el instante t = 0. La tensión inicial del condensador es de 15V y la corriente que circula por la bobina tiene una intensidad inicial nula. La capacidad y la inductancia tienen valores fijos, 0,25 μF y 1 H respectivamente.

[23] ente otra tantas, como la pulsación propia, ωo y la razón de amortiguamiento, ζ que desempeñan el mismo papel en los circuitos de memoria doble que la constante de tiempo en los circuitos con memoria simple. Para más información se recomienda las páginas 370-372 en [13]

Hallar la solución para la tensión en el condensador para tres valores de la resistencia diferentes: 8,5 kΩ, 4 kΩ y 1 kΩ

La EDO del circuito de la figura 4.15 es la ecuación diferencial homogénea de la ecuación 4.53,

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \quad t > 0$$

(4.54)

esto, es así, porque no tenemos conectada ninguna fuente en el circuito. Además, la ecuación 4.50 es aplicable en este circuito de forma que,

$$C \cdot \frac{dv_C}{dt}\bigg|_{t=0} = C \cdot v'_C(0) = i(0)$$

(4.55)

pero i(t) es la intensidad de la corriente que recorre la bobina y, por tanto,

$$v'_C(0) = \frac{I_o}{C}$$

(4.56)

así pues, la intensidad inicial de la corriente que recorre la bobina especifica el valor de la primera derivada de la tensión del condensador en t = 0. Expresando esto con Matlab, sustituyendo valores y;

- para un valor R = 8,5 kΩ

```
vc = dsolve('1*0.25e-6*D2vc+8.5e3*0.25e-6*Dvc+vc = 0','vc(0)=15','Dvc(0)=0')

vc =

16/exp(500*t) - 1/exp(8000*t)
```

Esta es conocida como la respuesta sobreamortiguada y consiste en dos ondas exponenciales en cuyos exponentes encontramos sus dos raíces reales, y diferentes, s_1 = -500 y s_2 = -8000 con las cuales se puede encontrar la ecuación característica del circuito.

- para un valor R = 4 kΩ

```
vc = dsolve('1*0.25e-6*D2vc+4e3*0.25e-6*Dvc+vc = 0','vc(0)=15','Dvc(0)=0')

vc =

15/exp(2000*t) + (30000*t)/exp(2000*t)
```

Esta forma especial de respuesta tiene lugar porque las raíces son iguales, $s_1 = s_2 = -2000$ y corresponden al llamado amortiguamiento crítico.

- para un valor $R = 1\ \text{k}\Omega$

```
vc = dsolve('1*0.25e-6*D2vc+1e3*0.25e-6*Dvc+vc = 0','v(0)=15','Dv(0)=0')

vc =

(15*cos(500*15^(1/2)*t))/exp(500*t)+(15^(1/2)*sin(500*15^(1/2)*t))/exp(500*t)

pretty(vc)

               1/2         1/2           1/2
  15 cos(500 15    t)    15    sin(500 15    t)
  ------------------- + ----------------------
      exp(500 t)              exp(500 t)
```

Esta es una respuesta sinusoidal amortiguada característica del caso subamortiguado en el que tenemos raíces complejas conjugadas, s_1, $s_2 = -500 \pm j{\cdot}500{\cdot}\sqrt{15}$. Este resultado de v_C se puede escribir en la forma, con α la parte real de la raíz y β la parte imaginaria

$$v_C(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot \left[V_o \cdot \cos(\beta \cdot t) - \left(\alpha \cdot V_o - \frac{I_o}{C}\right) \cdot \sin(\beta \cdot t)\right] \tag{4.57}$$

Así pues, aun cuando las raíces sean complejas, hemos llegado a una función real del tiempo. La parte real de las raíces es el factor de amortiguamiento que figura en la exponencial, es decir, α. Mientras que la parte imaginaria de las raíces es la pulsación de la onda sinusoidal amortiguada resultante, esto es β. Un poco más adelante veremos lo útil de cada parámetro ahora nos centraremos en representar las tres respuestas con Matlab,

```
figure
hold on
fplot('16/exp(500*t) - 1/exp(8000*t)',[0 8e-3],'r')
fplot('15/exp(2000*t) + (30000*t)/exp(2000*t)',[0 8e-3],'c')
fplot('15*cos(500*15^(1/2)*t)/exp(500*t)+
                           +15^(1/2)*sin(500*15^(1/2)*t)/exp(500*t)',[0 8e-3])
xlabel('t (ms)')
ylabel('vc(t) (V)')
legend('Sobreamortiguada','Amortiguamiento crÌtico','Subamortiguada')
grid
hold off
```

En la figura 3.17 están representadas las tres respuestas, todas parten de 15 V (condición inicial) y luego tienden a cero. Sin embargo, la naturaleza de las ondas de respuesta es totalmente diferente. La respuesta sobreamortiguada es relativamente lenta y poco atractiva, la respuesta del amortiguamiento crítico cae rápidamente a cero pero no sobrepasa nunca su valor final. La respuesta subamortiguada pasa rápidamente por cero cruzándolo y llega a anularse tras una sucesión de oscilaciones amortiguadas.

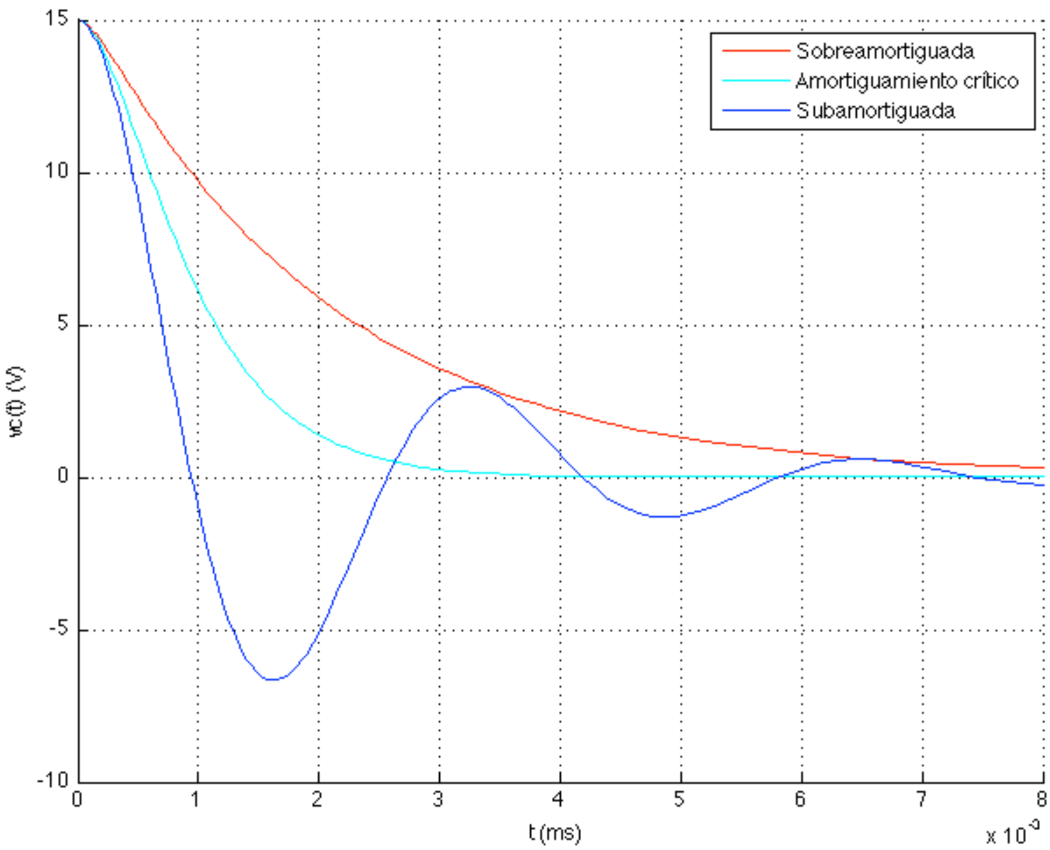


Figura 4.16. Respuestas posibles del circuito RLC en serie de la figura 4.15

Finalmente, la dualidad vuelve a estar presente, no necesitamos estudiar en detalle el circuito RLC en paralelo ya que son aplicables todos los resultados obtenidos en el caso del circuito RLC en serie[24]:

$$R_{Th} \leftrightarrow G_N \qquad C \leftrightarrow L \qquad v_C \leftrightarrow i_L \qquad v_{Th} \leftrightarrow i_N \tag{4.58}$$

Otro ejemplo;

El circuito representado en la figura 3.15 tiene una función escalón a la entrada, $V_{th} = A \cdot u(t)$, con unas condiciones iniciales nulas. Hallar la respuesta resultante $v_c(t)$, (t), si R_{th}, L, C son 1 kΩ, 2 H, 0,5 μF respectivamente y la amplitud del escalón es, $A = 10$ V.

Esta vez, la EDO del circuito RCL en serie es de esta manera

[24] Consultar página 354 en [13]

$$L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2} + R \cdot C \cdot \frac{dv_C}{dt} + v_C = A \quad t > 0$$

(4.59)

el valor de la función escalón a la entrada es la unidad y, por tanto, la amplitud A de la señal. Resolvemos con Matlab,

```
vc = dsolve('2*.5e-6*D2vc+1e3*.5e-6*Dvc+vc=10','vc(0)=0','Dvc(0)=0')

vc =

10 - (2*15^(1/2)*sin(250*15^(1/2)*t))/(3*exp(250*t)) -
                                         - (10*cos(250*15^(1/2)*t))/exp(250*t)

pretty(vc)

           1/2           1/2                   1/2
       2 15    sin(250 15    t)   10 cos(250 15    t)
  10 - ------------------------ - -------------------
             3 exp(250 t)             exp(250 t)

fplot('10 - 2*15^(1/2)*sin(250*15^(1/2)*t)/(3*exp(250*t)) –
                              - 10*cos(250*15^(1/2)*t)/exp(250*t)', [0 20e-3])
xlabel('t (ms)')
ylabel('vc(t) (V)')
title('Respuesta al escalón, 10·u(t)')
grid
```

En la figura 4.17 se ha representado gráficamente esta respuesta. La onda es nula en t = 0, tal como exigen las condiciones iniciales, y tiende luego a un valor final de 10 V. Éste es igual a la amplitud de la respuesta forzada ya que la respuesta natural tiende a cero. Lo explicamos mejor, resulta que la respuesta del circuito RLC en serie al escalón puede escribirse

$$v_C(t) = A + v_{CN}(t)$$

(4.60)

donde $v_{CN}(t)$ es la componente natural del circuito (de la que hablamos en el circuito RC) que puede adoptar una de las tres formas de amortiguamiento (como vimos en el ejemplo anterior) que para este ejercicio, según la figura 4.17, es subamortiguada.

Mientras que la respuesta forzada $v_{CF}(t)$ es una solución particular de la ecuación 4.59. No resulta difícil ver que $v_{CF} = A$ es la solución particular ya que dA/dt Y d^2A/dt^2 son ambas nulas.

En efecto, la ecuación 4.60 corresponde al método clásico descomponiendo la solución en dos partes, la respuesta natural y la respuesta forzada[25]

[25] consultar páginas 359-361 en [12]

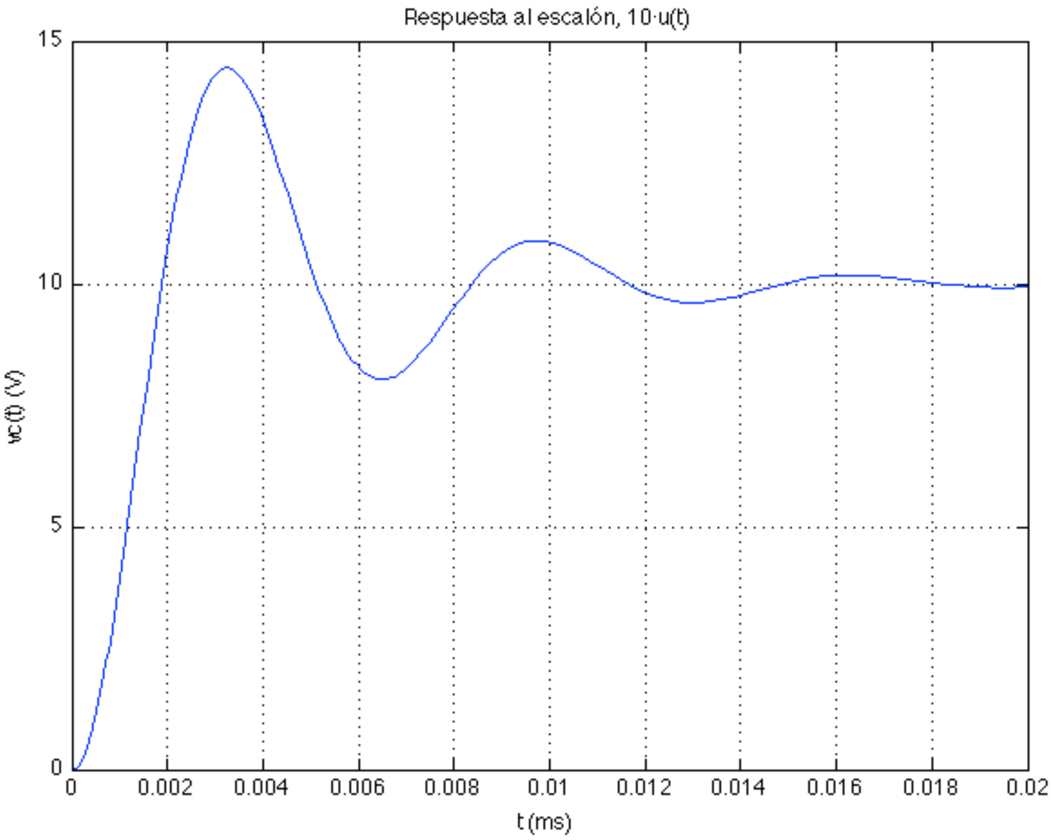


Figura 4.17 Respuesta al escalón de la señal $v_c(t)$

Volviendo a la solución de $v_c(t)$, tal y como ha resulto Matlab resulta

$$v_C(t) = 10 - e^{-250\cdot t}\cdot\left(10\cdot\cos(250\cdot\sqrt{15}\cdot t) + \frac{2\cdot\sqrt{15}}{3}\cdot\sin(250\cdot\sqrt{15}\cdot t)\right)$$

(4.61)

comparándolo con la ecuación 4.60 se verifica y por tanto la forma general de la respuesta del circuito RLC en serie al escalón se puede escribir de la misma manera que la ecuación 4.60.

4.9. Transformada inversa de Laplace

La transformación de Laplace se utiliza para alterar la forma de señales y sistemas a fin de simplificar el estudio del proceso de señales. El método proporciona un punto de vista y una terminología que han penetrado en el estudio de los circuitos lineales. El proceso de recuperación de la onda a partir de una transformada se denomina transformación inversa de Laplace. La característica destacada de este proceso es que la transformación de Laplace es única. Simbólicamente, podemos enunciar la propiedad de unicidad de la manera siguiente:

$$\text{Si } \mathcal{L}\{v(t)\} = V(s), \text{ será } \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}(=)u(t)\cdot v(t)$$

(4.62)

El símbolo $\mathcal{L}^{-1}$ representa la transformación inversa de Laplace. La notación (=) significa igual en casi todos los puntos. Los únicos puntos en los cuales puede no ser válida la igualdad son los de discontinuidad de $v(t)$.

Por último , notemos que la onda recuperada por la transformación inversa es nula para $t < 0$. La justificación matemática de este hecho se sale del ámbito de este estudio. Pero para preservar la unicidad, es decir, que exista una y sólo una onda de señal para cada transformada de señal y recíprocamente, debemos suponer que todas las ondas que intervienen son nulas para tiempos negativos. Esto es muy importante. Por ejemplo, cuando escribimos

$$V(s) = \mathcal{L}\{\sin(\beta\cdot t)\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

(4.63)

con Matlab vemos que

```
syms beta s

V = beta/(s^2 + beta^2)

V =

beta/(beta^2 + s^2)

v = ilaplace(V)

v =

sin(beta*t)
```

la función *ilaplace* obtiene la transformada inversa de Laplace. El resultado expresado tal que

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right\} = \sin(\beta\cdot t)$$

(4.64)

teniendo en cuenta 4.62 en la ecuación 4.64 no estamos refiriéndonos a una onda sinusoidal eterna, sino a una onda $v(t) = u(t)\cdot\text{sen}(\beta\cdot t)$ que se inicia en $t = 0$. La función escalón que se requiere no siempre se indica explícitamente. No obstante, debe entenderse implícita una función escalón, pues de otro modo el proceso no sería único.

Otro ejemplo; determinar la onda correspondiente de la ecuación 4.65.

$$V(s) = \frac{10}{s+2} \tag{4.65}$$

Con Matlab descubriremos que V(s) es la transformada de la onda exponencial,

```
V = 10/(s + 2);

v = ilaplace(V)

v =

10/exp(2*t)
```

que corresponde a una señal exponencial de amplitud 10 y constante de tiempo 0,5. Observemos que estos datos están contenidos en la transformada. Dicho de otro modo, la trasformada y la onda constituyen representaciones equivalentes de la señal exponencial. En otras palabras, tanto la transformada como en la onda se dispone de los datos necesarios para describir la señal. La transformación de Laplace altera la forma de los datos, pero no los propios datos.

De este ejemplo se puede concluir en; el método general para efectuar la transformación inversa se basa en descomponer $V(s)$ en forma de combinación lineal de términos. Dicho de otra manera, una función que pueda escribirse en forma de cociente de polinomios se denomina función racional y todas las transformadas que nos interesen serán funciones racionales. En consecuencia, escribimos $V(s)$ en la forma

$$V(s) = \frac{r(s)}{q(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot s + a_0} \tag{4.66}$$

donde $r(s)$ y $q(s)$ son polinomios en la variable frecuencia compleja s y los números a_k y b_k son números reales. Las transformadas que nos interesan serán siempre cocientes de polinomios con coeficientes reales. Los dos polinomios se pueden expresar en forma factorial en función de sus raíces. Por tanto, otra representación de $V(s)$ será

$$V(s) = K \cdot \frac{(s-z_1) \cdot (s-z_2) \ldots (s-z_m)}{(s-p_1) \cdot (s-p_2) \ldots (s-p_n)} \tag{4.67}$$

donde z_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ son las raíces del polinomio $r(s)$; y $p_k = 1, 2, \ldots, n$ son las raíces del polinomio $q(s)$. Las z_k reciben el nombre de ceros de la función racional $V(s)$, porque cuando $s = z_k$, la función $V(s)$ se anula. Las p_k se denominan polos, porque cundo $s = p_k$, $V(s)$ se hace infinita. A los polos y ceros se les llama, colectivamente, frecuencias críticas porque representan valores de la variable frecuencia compleja s a los cuales $V(s)$ hace cosas interesantes, tales como anularse o hacerse infinita.

Si hay más polos que ceros ($n > m$) y si ninguno de los polos es una raíz repetida de $q(s)$, se podrá descomponer $V(s)$ en fracciones parciales de la manera siguiente:

$$V(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s - p_n} \tag{4.68}$$

De esta manera se podrá expresar $V(s)$ en forma de combinación lineal de términos, un término para cada uno de sus n polos distintos. Las k asociadas a cada término se denominan residuos. Constituyen, simplemente, la amplitud o peso de cada término de la descomposición. Cada uno de los términos de la descomposición en fracciones parciales de $V(s)$ tiene la forma de la transformada de una señal exponencial. Como reconocemos cada término, podemos escribir fácilmente la onda correspondiente en la forma

$$v(t) = u(t) \cdot \{k_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + k_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \cdots + k_n \cdot e^{p_n \cdot t}\} \tag{4.69}$$

Los polos figuran en los exponentes de la onda exponencial y los residuos son las amplitudes. Por ejemplo, la transformada

$$V(s) = \frac{2 \cdot (s + 3)}{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 2)} \tag{4.70}$$

tiene los polos simples en $s = 0$, $s = -1$ y $s = -2$. Esto es, conocidos los polos de $V(s)$, el algoritmo para hallar $v(t)$ se reduce a hallar los residuos y esto en Matlab es,

```
syms s
V = 2*(s+3)/(s*(s+1)*(s+2))

V =

(2*s + 6)/(s*(s + 1)*(s + 2))

[num,den] = numden(V)

num =

2*s + 6


den =

s*(s + 1)*(s + 2)
```

aún no tenemos los residuos, por el momento se ha separado mediante la función *numden* el numerador del denominador. Así se obtendrán los polinomios como en la ecuación 4.66 de esta forma,

```
num = expand(num)

num =

2*s + 6

den = expand(den)

den =

s^3 + 3*s^2 + 2*s
```

en la que *num* contiene el polinomio $r(s)$ y *den* el polinomio en $q(s)$. La función *expand* pone la expresión como el producto de los factores de s; en el caso de *num* el resultado es el mismo porque ya lo está. Finalmente, esto es necesario para hallar el residuo

```
[r,p,k] = residue([2 6],[1 3 2 0])

r =

     1
    -4
     3


p =

    -2
    -1
     0


k =

     []
```

la función *residue* encuentra los residuos (en r), polos (en p) y el término independiente (en k) de la transformada $V(s)$ pero necesita los coeficientes de los polinomios expresados como en la ecuación 4.66. En el caso del término independiente k; [ ] nos indica que está vacio[26], por tanto no tiene términos independientes.

Conocemos los residuos y los polos, por tanto, podemos expresar $v(t)$ como nos indica la ecuación 4.69

$$v(t) = u(t) \cdot [1 \cdot e^{-2 \cdot t} + (-4) \cdot e^{-1 \cdot t} + 3 \cdot e^{0 \cdot t}] = u(t) \cdot [e^{-2 \cdot t} - 4 \cdot e^{-t} + 3] \tag{4.71}$$

el mismo resultado se hubiese conseguido, directamente con la función *ilaplace*

[26] En Matlab pueden declararse variables vacías, sin datos asignándola a [ ], como en: *var* = [ ]

```
v = ilaplace(V)

v =

1/exp(2*t) - 4/exp(t) + 3
```

Una consideración importante es cuando $V(s)$ tenga un polo simple complejo. Dado que $V(s)$ es un cociente de polinomios con coeficientes reales, todo polo complejo $p = \alpha + j \cdot \beta$ debe ir acompañado de un polo $p^* = \alpha - j \cdot \beta$. Es decir, los polos complejos de $V(s)$ deben aparecer por pares conjugados. A consecuencia de ello, la descomposición en fracciones parciales de $V(s)$ contendrá los términos

$$V(s) = \cdots + \frac{k}{s - \alpha - j \cdot \beta} + \frac{k^*}{s - \alpha + j \cdot \beta} + \cdots \tag{4.72}$$

Los residuos en los polos conjugados serán, a su vez, conjugados ya que $V(s)$ es una función racional con coeficientes reales. Los residuos en los polos complejos se pueden calcular utilizando el algoritmo citado anteriormente (ecuación 4.69). En general, resultan ser números complejos. Escribiendo los residuos en forma polar

$$k = |k| \cdot e^{j \cdot \theta} \tag{4.73}$$

y por tanto

$$k^* = |k| \cdot e^{-j \cdot \theta} \tag{4.74}$$

de la onda correspondiente en la forma

$$v(t) = u(t) \cdot [\ldots |k| \cdot e^{j\theta} \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot t} + |k| \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot t} \ldots] \tag{4.75}$$

que puede escribirse así:

$$v(t) = u(t) \cdot [\ldots + 2 \cdot |k| \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \left[\frac{e^{j \cdot (\beta \cdot t + \theta)} + e^{-j \cdot (\beta \cdot t + \theta)}}{2}\right] \ldots] \tag{4.76}$$

La expresión entre corchetes es de la forma (fórmula de Euler)

$$\cos x = \frac{(e^{j \cdot x} + e^{-j \cdot x})}{2}$$

(4.77)

En consecuencia, podremos combinar estos términos y darán la sinusoide amortiguada

$$v(t) = u(t) \cdot [\ldots + 2 \cdot |k| \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t + \theta) + \cdots]$$

(4.78)

Todo esto significa que cuando *V*(*s*) tenga un polo complejo, también tendrá su complejo conjugado. Estos dos polos se combinan entonces para producir una onda sinusoidal amortiguada. Los residuos en estos polos deben ser conjugados entre sí; por tanto, bastará calcular uno de ellos. La amplitud de la sinusoide amortiguada resultante es igual al doble del módulo del residuo en el polo de parte imaginaria positiva. El ángulo de fase es igual al argumento de este residuo. El exponente del factor exponencial es igual a la parte real del polo, mientras que la pulsación de la sinusoide es igual a la parte imaginaria de dicho polo. Vemos, de nuevo, que todos los datos necesarios para recuperar la onda están presentes en la transformada. Transformadas y ondas son, simplemente, las dos caras de una misma moneda: la señal

Ejemplo; dada la transformada

$$V(s) = \frac{20 \cdot (s+3)}{(s+1) \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 5)}$$

(4.79)

hallar, mediante Matlab, los polos y los residuos para construir la onda *v*(*t*).

```
syms s
V = 20*(s+3)/((s+1)*(s^2+2*s+5))

V =

(20*s + 60)/((s + 1)*(s^2 + 2*s + 5))

[n,d] = numden(V);
d = expand(d)

d =

s^3 + 3*s^2 + 7*s + 5

[r,p,k]=residue([20 60],[1 3 7 5])

r =

  -5.0000 - 5.0000i
  -5.0000 + 5.0000i
  10.0000


p =

  -1.0000 + 2.0000i
  -1.0000 - 2.0000i
  -1.0000
```

```
k =

     []
```

tenemos ya todos los datos para construir la onda, tan solo hay que resolver sobre la ecuación 4.78; obtendremos $v(t)$ de la misma forma operando con Matlab

```
v=ilaplace(V)

v =

10/exp(t) - (10*(cos(2*t) - sin(2*t)))/exp(t)

pretty(v)

    10      10 (cos(2 t) - sin(2 t))
  ------ - ------------------------
  exp(t)            exp(t)
```

Otro ejemplo; representar gráficamente la señal $v(t)$ a partir de la transformada $V(s)$ siguiente

$$V(s) = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2 \cdot (s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{2 \cdot k_3}{(s+1)^2+4} \tag{4.80}$$

```
syms k1 k2 k3 s
V=k1/(s+1)+(k2*(s+1))/((s+1)^2+4)+k3*2/((s+1)^2+4);
pretty(V)

      2 k3         k1       k2 (s + 1)
  ------------ + ----- + ------------
         2       s + 1          2
  (s + 1)  + 4           (s + 1)  + 4

v=ilaplace(V);
pretty(v)

              /                      / k2 + 2 k3    1 \ \
           k2 | cos(2 t) + sin(2 t) | --------- - - | |
    k1        \                      \   2 k2      2 / /
  ------ + --------------------------------------------
  exp(t)                      exp(t)
```

Si asignamos valores para k_1 = 10, k_2 = -10, k_3 = 10 podremos representar gráficamente una solución para la señal $v(t)$,

```
v=subs(v,{k1,k2,k3},{10,-10,10})

v =
```

```
10/exp(t) - (10*(cos(2*t) - sin(2*t)))/exp(t)

pretty(v)

    10     10 (cos(2 t) - sin(2 t))
  ------ - ------------------------
  exp(t)            exp(t)

fplot('10/exp(t) - (10*(cos(2*t) - sin(2*t)))/exp(t)',[0, 6])
xlabel('t')
ylabel('v')
title('respuesta temporal v(t)')
grid
```

la función *subs* se utiliza para sustituir variables simbólicas utilizadas en una expresión por valores numéricos y evaluar su resultado. Los argumentos de la función *subs*, son; primero la variable que contiene la expresión; después las variables a sustituir, dentro de unas llaves {}; por último los valores que sustituyen a las variables también, en el interior de unas llaves {}.

La señal $v(t)$ se representa en la figura siguiente,

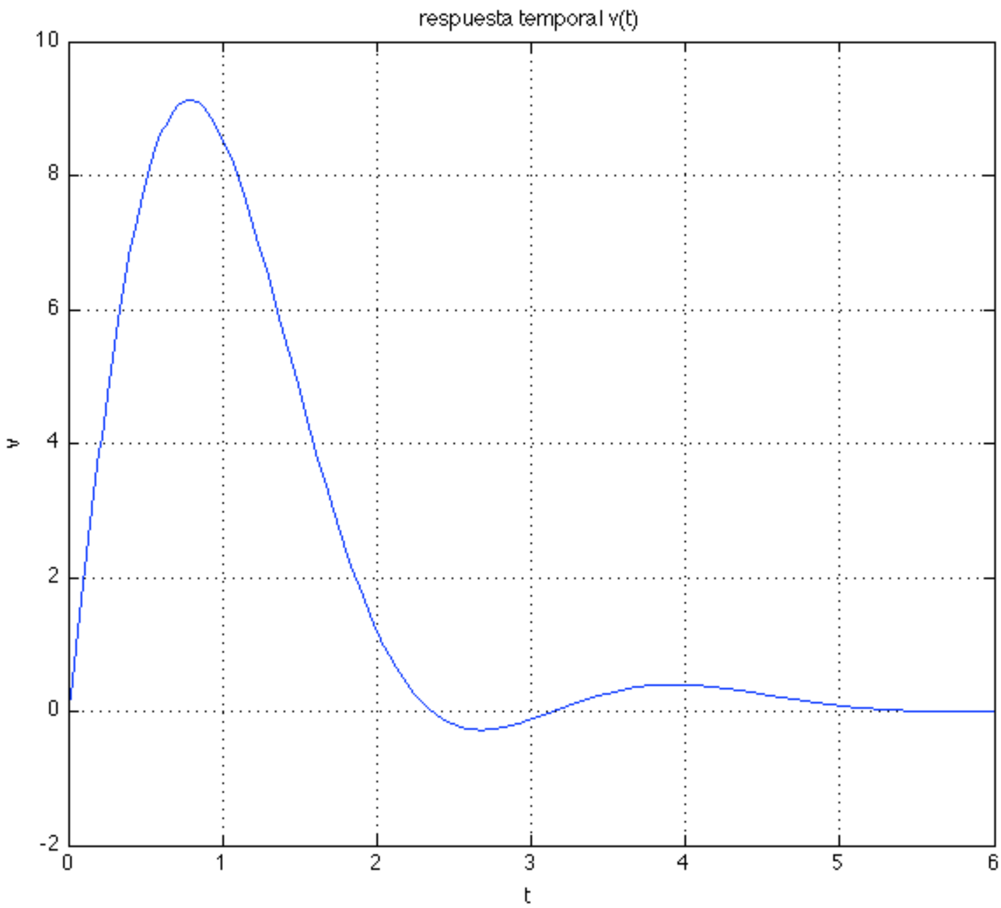


Figura 4.18 Una solución para *v*(*t*) a partir de la transformada *V*(*s*)

5. Conclusiones

Los métodos tradicionales de enseñanza están fuertemente arraigados en la universidad, las innovadoras metodologías didácticas como el ABP están en continuo desarrollo y experimentación, dando buenos resultados en la actualidad, podemos encontrar referencias en la bibliografía de este trabajo pero, también, en seminarios y congresos. Son muchos los profesionales de la educación que en la actualidad buscan la forma más efectiva de mejorar los procesos de transmitir conocimiento con el uso de nuevas tecnologías que lo favorezcan.

Tal vez sea necesario aplicar estos nuevos procedimientos en el marco académico actual pues suelen estar desarrollados de tal manera que satisfacen las necesidades de crecimiento personal y social necesarios de cara al futuro profesional del alumnado. También hay una tendencia actual a trabajar en grupos, una interacción que busca el perfeccionamiento en el conocimiento mediante el intercambio de información en un contexto en el que todos puedan ser evaluados por ellos mismos y por los grupos a los que pertenecen. En este sentido, la integración de la enseñanza universitaria en el campo europeo ha traído el desarrollo común de los créditos europeos (ECTS) y el cambio del paradigma docente llamado Bolonia en donde se aboga por estas metodologías BPL y de participación más activa del alumnado en la transmisión de conocimiento.

El significativo pues, un giro hacia un método como el aprendizaje basado en problemas. No obstante, no es un camino fácil. El principal escollo es el gran esfuerzo, recursos y tiempo que supone, precisamente, su integración con un método como el tradicional, no puede rotundamente acabarse con el sistema actual pues plantearía dudas y controversia. Si bien es sabido que los alumnos están acostumbrados al método tradicional de clases magistrales puede presentarse el ABP como un sistema extraño que puede plantearles dificultades. También es posible que el método no sea el acertado, su novedad y su éxito en otras universidades y estudios no implica el mismo éxito en áreas en las que quizás no sea realmente válida.

Por tanto, se concluye en que el tiempo, los recursos y el esfuerzo que supone el ABP, a pesar de contar con ellos, no garantiza el éxito del método. Por ello, conviene empezar aplicando este método en aprendizajes que se dan principalmente fuera de clase pero que el tutor pueda de alguna manera evaluar y en nuestro caso, como herramienta matemática del sofware Matlab para solucionar problemas típicos en el análisis de circuitos puede ser una buena manera de empezar a valorar la contribución del ABP al aprendizaje del alumnado de la asignatura de circuitos electrónicos, sólo la experiencia dará razón o no al uso de este método.

La herramienta matemática Matlab es muy útil en el campo del análisis de circuitos en asignaturas básicas de electrónica. Se ha propuesto una técnica docente basada en APB para que los alumnos puedan conocer, aplicar y ser capaces de solucionar los problemas típicos de análisis de circuitos utilizando Matlab. La utilidad es primordial en la aplicación de la resolución de las ecuaciones que se plantean en los circuitos y también en encontrar la respuesta temporal a través de la transformada de Laplace. Este proceso de aprendizaje se pretende autónomo e independiente de las clases teóricas de la asignatura, respaldado por la atención y soporte del docente.

Se ha propuesto un manual de Matlab aplicado a circuitos y disponible en el campus virtual para que los alumnos puedan conocer y aplicar las instrucciones básicas para resolver de forma matemática y gráfica los problemas de los sistemas electrónicos básicos. En este sentido, se plantean diferentes ejercicios básicos centrados en circuitos resistivos y con elementos con memoria donde se puede seguir la secuencia de programa para su resolución. Se sugiere que estos conocimientos sean valorados y evaluados en el curso para ver el grado de asimilación de los mismos por el alumnado.

Sería muy recomendable para saber el grado de consecución de los objetivos docentes propuestos y de aceptación de los estudiantes la realización de una encuesta final una vez finalizado el curso para conocer los beneficios y dificultades que se ha encontrado el usuario final del manual propuesto. Así en futuras versiones se podría mejorar la forma y contenido del documento para maximizar los esfuerzos y minimizar el tiempo destinado al aprendizaje. En este sentido, los resultados de la encuesta final junto con las encuestas parciales que se proponen pueden dar el grado se satisfacción y consecución de los objetivos docentes, que suponen dar a conocer y motivar a la aplicación del programa de desarrollo de Matlab en las asignaturas comentadas.

Finalmente cabe concluir que este proyecto docente se ha realizado con estrecha relación de los profesores que imparten docencia en ingeniería en la Universidad Politécnica de Catalunya, en especial con mi tutor que ha significado un soporte y colaborador en la concreción de esta propuesta docente innovadora.

6. Bibliografía

[1] Batlle, C; Massana, I.; Zaragozá, M. *Àlgebra i equacions diferencials*. *Aula Politècnica*. Edicions UPC, 2000.

[2] Garcia Sevilla, Julia. *El aprendizaje basado en problemas en la enseñanza universitaria*. Ediciones de la Universidad de Murcia, 2008.

[3] Generalitat Valenciana. *Ficha metodológica coordinada por la Universidad Politécnica de Valencia*. Mayo 2006. Versión 1 [Consulta: 3 mayo 2012]. Disponible en: <http://www.recursoseees.uji.es/fichas/fm3.pdf>

[4] Hanselman, Duane; Littlefield, Bruce. *Mastering Matlab 7. International Edition*. Pearson Prentice Hall, 2005.

[5] Hayt, William H.; Kemmerly Jack E. Análisis de circuitos en ingeniería. 5ª ed. Mc Graw-Hill, 1993.

[6] Marchand, P.; Holland, Thomas; *Graphics and GUIs with Matlab*. 3rd ed. Chapman & Hall/CRC, 2003.

[7] Ogata, K. *Solving Control Engineering Problems with Matlab*. Prentice-Hall International, 1994

[8] Paños Sánchis, R. *Aprendizaje basado en problemas (ABP). Versión completa*, 2011.[Consulta: 9 de mayo 2012]. Disponible en: <http://www.slideshare.net/RosaPanosSanchis/abp-aprendizaje-basado-en-problemasejemplosversin-completa>

[9] Pérez Lopez, César. *Matlab y sus aplicaciones en las ciencias y la ingeniería*. Pearson Educación, 2002

[10] Prat Viñas, Lluís. *Circuitos y dispositivos electrónicos. Fundamentos de electrónica*. Edicions UPC, 1998.

[11] Santiago, S. A; Collazo L. *Aprendizaje basado en la solución de problemas*, 2007 [Consulta: 10 de mayo 2012]. Disponible en: <http://www.slideshare.net/collazo_libbybeth/aprendizaje-basado-en-la-solucion-de-problemas>

[12] Servicio de Innovación Educativa (UPM) 2008. *Aprendizaje Basado en Problemas*. [Consulta: 8 mayo 2012]. Disponible en: <http://innovacioneducativa.upm.es/guias/Ejemplo_ABP.pdf>

[13] Thomas, R. E.; Rosa A. J. *Circuitos y señales: Introducción a los circuitos lienales y de acoplamiento*. Reverté, 2000.

[14] Universidad ICESI. Método del caso. Blog con testimonios para la escritura de un caso. *El método de casos*, diciembre 2008 [Consulta: 8 mayo 2012]. Disponible en: <http://www.icesi.edu.co/blogs/metododecaso/files/2008/12/elmetododecasos11.pdf>

[15] Valero-García, M. Las dificultades que tienes cuando haces PBL. [Consulta 17 abril 2012]. Disponible en: <http://epsc.upc.edu/projectes/usuaris/miguel.valero/materiales/docencia/articulos/dificultades_PBL.pdf>

[16] Wikipedia [en línea]. Disponible en: <http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada>